МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

Туганбаев Диар Аскарович

КОЛЬЦА РЯДОВ ЛОРАНА И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:
д.ф.-м.н., проф. А. В. Михалёв
к.ф.-м.н., доц. В. Т. Марков

Москва – 2003

Содержание

Введение

Данная работа посвящена исследованию теоретико-кольцевых свойств колец (косых формальных) рядов Лорана и колец (формальных) псевдодифференциальных операторов. Начало использования колец косых рядов Лорана восходит к работам Шура, Диксона и Гильберта начала XX века. Например, при изучении независимости аксиом в геометрии Гильберт использовал кольцо косых рядов Лорана для построения тела, бесконечномерного над своим центром. Изучение колец рядов Лорана с произвольным кольцом коэффициентов было начато в конце 70-х — начале 80-х годов Лоренцем [31], Рисманом [46] и Смитсом [49]. Техника использования колец рядов Лорана является удобным инструментом в теории колец. Например, в [32] Макар-Лиманов с помощью колец косых рядов Лорана от двух переменных показал, что кольцо частных алгебры Вейля содержит свободную некоммутативную подалгебру. В работе Гудёрла и Смолла [21] кольца рядов Лорана используются для оценивания размерности Крулля и глобальной размерности нётеровых P.I. колец.

В работах Сонина [8]-[11] и [50] систематически исследуются теоретико-кольцевые свойства колец рядов Лорана. В частности, выяснено, когда кольца рядов Лорана обладают размерностью Крулля, бирегулярны, строго регулярны и (в предположении конечности порядка скручивающего автоморфизма) регулярны.

Кольца рядов Лорана тесно связаны с кольцами рядов Мальцева-Неймана и кольцами обобщённых степенных рядов, интенсивно изучаемыми в последнее время. Напомним, что кольца рядов Мальцева-Неймана были определены в 1948 году Мальцевым для доказательства вложимости групповой алгебры над полем в тело (независимо в 1949 году эта конструкция была определена Б.Нейманом). Среди многочисленных работ в этом направлении мы отметим работы Бергмана [14], Лоренца [31], Рисмана [46], Смитса [49] и Массона и Стаффорда [35]. Кольца обобщённых степенных рядов с показателями степени в упорядоченном моноиде в последние годы изучались в работах многих авторов (можно выделить работы Рибенбойма [37]–[45], а также работы [17] и [27]–[30]).

Алгебра псевдодифференциальных операторов $A((\delta^{-1}))$ была, по-видимому, введена Шуром в 1905 году в работе [48] и с тех пор неоднократно использовалась в различных разделах математики (см., например, [1], [47], [6], [34]). Поскольку в диссертации исследуются лишь теоретико-кольцевые свойства колец псевдодифференциальных операторов, мы не излагаем здесь историю применения псевдодифференциальных операторов в математике и не приводим соответствующие работы, не относящиеся к структурной теории колец. Выделим только работы Гельфанда и Дикого [1] и Паршина [7].

В работе Паршина [7] автор развил алгебраическую теорию колец формальных псевдодифференциальных операторов от нескольких переменных и отмечает, что "другие подходы к построению колец псевдодифференциальных операторов см. в [24], [25], [2]". В этой же работе используются итерированные кольца косых рядов Лорана. В структурной теории колец кольца псевдодифференциальных операторов используются для конструктивизации вычислений в алгебрах дифференциальных операторов (см. работу Гудёрла [20]), а также как источник многочисленных примеров (см., например, книгу Гудёрла и Уорфилда [22]). Если кольцо псевдодифференциальных операторов обладает правой размерностью Крулля, то оно является нётеровым справа кольцом [50].

Диссертация посвящена исследованию кольцевых свойств колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов. В связи с тем, что эти кольцевые свойства оказываются весьма близки друг к другу, оказывается удобно ввести понятие лорановских колец, включающее в себя как кольца косых рядов Лорана так и кольца псевдодифференциальных операторов и доказывать заметную часть результатов в такой общности. Строятся и другие примеры лорановских колец, для которых также верны многие результаты диссертации.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, но не обязательно коммутативными. В диссертации используются базовые сведения из теории колец, которые можно найти, например, в [4] и [12].

Первая глава диссертации посвящена определениям, обозначениям и развитию необходимой техники для проведения вычислений в лорановских кольцах. В ней также строятся различные примеры лорановских колец.

Кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ над одним и тем же кольцом A изоморфны как абелевы группы и умножение в них задаётся похожим образом. Переменная в этих кольцах не коммутирует с коэффициентами и различие между кольцами состоит лишь в том, какое именно соотношение выступает в качестве замены коммутативности: $xa=\varphi(a)x$ или $ta=at+\delta(a)$. В случае тождественного автоморфизма φ и нулевого дифференцирования δ, эти кольца изоморфны кольцу обычных рядов Лорана.

Многие теоремы переносятся с колец косых рядов Лорана на кольца псевдодифференциальных операторов и обратно практически без изменений, поэтому возникает закономерный вопрос о том, какого рода должно быть умножение (или задающее его соотношение вида $xa=\ldots$) на абелевой группе формальных рядов, для того, чтобы сохранялись те же самые кольцевые свойства.

Оказывается, что единственное необходимое свойство (если не считать естественных требований, вытекающих из дистрибутивности умножения по отношению к формальной бесконечной сумме, и из отождествления единицы кольца коэффициентов с единицей циклической группы по умножению, порождённой переменной) состоит в том, что младшая степень произведения двух рядов должна быть не меньше суммы младших степеней этих рядов (в случае кольца псевдодифференциальных операторов, где степень переменной в формальном ряде убывает, а не возрастает, вместо младших степеней используются старшие). Кольца, состоящие из формальных степенных рядов с отрицательными степенями, удовлетворяющие этому условию, называются в данной диссертации лорановскими кольцами.

Из этого требования, с учётом обратимости x, возникает необходимое условие на соотношение перестановки переменной с коэффициентом $xa = \ldots$, состоящее в том, что младшая степень правой части должна быть равна младшей степени левой. Обратимость x требует, чтобы соотношение имело вид $xa = \varphi(a)x + \ldots$, где φ — автоморфизм кольца коэффициентов. Требование ассоциативности умножения накладывает на соотношение последнее условие, которое, однако, нам будет удобнее сформулировать после того, как будет развита особая вычислительная техника. Проверка этого условия в общем случае также требует значительных усилий, однако в отдельных частных случаях его удаётся легко проверить. Так, строится кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием (оно изучалось в [16] в случае, когда кольцо коэффициентов является телом), которое также оказывается частным случаем лорановского кольца.

Существует определённая взаимосвязь между решёткой правых (левых) идеалов лорановского кольца и решёткой правых (левых) идеалов его кольца коэффициентов: решётка идеалов кольца коэффициентов с помощью отображения μ вкладывается (с сохранением решёточных операций) в решётку идеалов лорановского кольца и существует отображение λ в обратную сторону, сохраняющее отношение включения, сопоставляющее каждому идеалу кольца рядов идеал кольца коэффициентов. При этом в конечнопорождённом случае отображение λ сохраняет и строгое включение, благодаря чему решётка идеалов лорановского кольца не может быть значительно богаче решётки идеалов его кольца коэффициентов.

Вторая глава диссертации посвящена изучению конкретных кольцевых свойств лорановских колец (все эти результаты, естественно, распространяются на кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов). Так, доказано, что лорановское кольцо является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом (для частных случаев колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов это хорошо известно (см., например, [16, с. 66] и [20]). Аналогично, лорановское кольцо является нётеровым (артиновым) тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является нётеровым (артиновым); это утверждение известно для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов (см., например, [22, с. 19], [50]). Также проверено, что лорановское кольцо является областью тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является областью. Доказано, что лорановское кольцо является областью главных правых идеалов тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является областью главных правых идеалов.

Получен также критерий того, что лорановское кольцо является цепным кольцом и критерий того, что оно является дистрибутивным и полулокальным кольцом. В этих случаях дополнительным необходимым условием оказывается артиновость (и кольца коэффициентов и лорановского кольца). Получено также описание полуцепных артиновых колец косых рядов Лорана. Для того, чтобы лорановское кольцо было простым или полупростым, должны быть, помимо такого же условия на кольцо коэффициентов, выполнены особые дополнительные условия (в случае кольца косых рядов Лорана это условие на скручивающий автоморфизм, а в случае кольцо псевдодифференциальных операторов — условие на дифференцирование).

Помимо точных критериев получены некоторые частичные результаты о дистрибутивных кольцах рядов, о полулокальных кольцах рядов и о кольцах главных правых идеалов. Для многих утверждений приведены примеры колец, иллюстрирующие необходимость каждого отдельного условия.

Перейдём к более подробному изложению. Диссертация состоит из введения и 2 глав (12 параграфов). Все основные результаты (теоремы, предложения, примеры и т. п.) имеют двойной индекс: первое число указывает на номер параграфа (в сквозной нумерации), второе — на номер утверждения в параграфе.

Первая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе даются определения основных изучаемых объектов: кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и кольца псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$. Проверено, в каких случаях кольцо косых рядов Лорана изоморфно (достаточно хорошим образом) кольцу обыкновенных рядов Лорана, а именно, доказано:

Предложение 1.1. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *автоморфизм φ является внутренним;*

(2) *существует изоморфизм π кольца обычных рядов Лорана $A((x))$ на кольцо косых рядов Лорана $A((y,\varphi))$, тождественно действующий на элементах кольца коэффициентов A и сохраняющий младшую степень рядов.*

Далее кратко исследуется вопрос о переходе к кольцам рядов Лорана от нескольких переменных. В работе [7] исследуются итерированные кольца рядов Лорана от нескольких переменных, которые строятся путём многократного перехода от кольца коэффициентов к кольцу рядов Лорана от одной переменной. При таком подходе переменные получаются неравноправны. Кроме того, с точки зрения структурной теории колец и исследуемых теоретико-кольцевых свойств, для изучения итерированных колец рядов Лорана достаточно исследовать свойства кольца рядов Лорана от одной переменной.

Поэтому в данной диссертации выбран другой естественный подход, при котором в кольцах рядов Лорана от нескольких переменных переменные равноправны. Однако при таком подходе кольцевые свойства колец рядов Лорана от нескольких переменных оказываются резко отличны от свойств колец рядов Лорана от одной переменной, что продемонстрировано в диссертации на примере кольца рядов Лорана от двух переменных. Так, в предложениях 1.2 и 1.3 доказано, что кольцо рядов Лорана от двух переменных никогда не бывает ни артиновым справа ни локальным (в частности, не бывает телом). Доказано также следующее утверждение:

Теорема 1.4. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *$A((x,y))$ — полупримитивная область, не являющаяся телом;*
(2) *кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x,y))$ — область;*
(3) *A — область.*

Во втором параграфе вводятся лорановские кольца: даются два различных определения и доказывается их эквивалентность. Первое определение отражает комбинаторный подход и фактически требует, чтобы кольцо как аддитивная группа состояло их обычных рядов Лорана с естественными ограничениями на умножение (чтобы запись коэффициентов в одночленах слева была корректной, и чтобы формальная сумма в рядах была дистрибутивной), а также с главным ограничением, состоящим в том, чтобы младшая степень произведения рядов была не меньше суммы их младших степеней.

Второе определение отражает структурный подход: требуется, чтобы в кольце была Z-фильтрация, удовлетворяющая определённым свойствам (в случае кольца рядов Лорана это фильтрация, задаваемая младшей степенью ряда). А именно, в множествах фильтрации U_1 и U_{-1} должна всегда находиться пара взаимно обратных элементов (в кольце рядов Лорана это x и x^{-1}), это условие ограничивает рассмотрение именно рядами с отрицательными степенями (кольцо формальных степенных рядов удовлетворяет всем условиям определения, кроме этого). Кроме того, должно быть возможно "бесконечное суммирование" элементов со строго монотонно возрастающей младшей степенью, это ограничивает рассмотрение кольцами рядов, а не многочленов (в кольце многочленов Лорана выполнены все условия кроме этого). Кольцом коэффициентов в Z-фильтрованном кольце в рамках такого подхода естественно называть кольцо U_0/U_1. Последнее условие требует, чтобы кольцо коэффициентов вкладывалось в само лорановское кольцо, расщепляя канонический гомоморфизм на U_0/U_1, как это имеет место в случаях колец рядов и многочленов. В случае, если это условие не выполнено, кольцо называется обобщённым лорановским кольцом и для него остаются верны многие утверждения. Ниже строится пример обобщённого лорановского кольца, не являющегося лорановским кольцом.

Кроме того, во втором параграфе показано, что понятие "бесконечной суммы", введённое в определении лорановского кольца, согласовано с формальной бесконечной суммой в кольце рядов Лорана.

Третий параграф посвящён исследованию простых свойств обобщённых лорановских колец. Так, доказывается, что "бесконечная сумма", введённая в определении такого кольца, удовлетворяет естественным свойствам дистрибутивности, коммутативности и т.п. (если рассмотреть на обобщённом лорановском кольце топологию, задаваемую фильтрацией, то "бесконечная сумма" становится просто суммой сходящегося ряда, однако в данной диссертации все её необходимые свойства доказываются чисто алгебраическими средствами).

Вводится отображение λ, сопоставляющее каждому идеалу (правому или левому) обобщённого лорановского кольца идеал (правый или левый) его свободных членов. Отображение λ переводит решётку идеалов обобщённого лорановского кольца в решётку идеалов кольца коэффициентов и сохраняет отношение включения, что устанавливает существенную связь между этими решётками и условиями на цепи в них. Кроме того, доказана ключевая лемма об отображении λ, из которой следует, что если $\lambda(P) = \lambda(S)$ и идеал (правый или левый) $\lambda(P)$ конечнопорождён, то $P = S$. Таким образом при некоторых ограничениях λ сохраняет не только отношение включения, но и отношение строгого включения, что усиливает связь между двумя решётками идеалов.

Как простое следствие этой леммы доказывается, что "ряд" (элемент обобщённого лорановского кольца) с обратимым свободным членом всегда обратим. Отсюда выводится следствие, что если кольцо коэффициентов является телом, то и обобщённое лорановское кольцо — тело. Обратное утверждение верно только для лорановских колец (соответствующий контрпример, кольцо дробных p^n-адических чисел, строится ниже).

В качестве иллюстративного соображения показывается, что в обобщённом лорановском кольце можно ввести норму, согласованную с топологией, задаваемой фильтрацией. За счёт существования "бесконечной суммы" полученное нормированное кольцо получается полным метрическим пространством. При этом кольцо многочленов Лорана получается всюду плотным подмножеством кольца рядов Лорана, так что кольцо рядов Лорана является просто расширением кольца многочленов Лорана до полного метрического пространства. При таком подходе то, что всякий "ряд" с обратимым свободным членом обратим, является следствием того факта, что сумма единицы с любым элементом, по норме меньшим единицы, всегда обратима в полном нормированном кольце.

В четвёртом параграфе рассматриваются уже только лорановские кольца (не обобщённые), вводятся обозначения и доказываются элементарные свойства. Так, вводится отображение μ, с одной стороны обратное введённому ранее отображению λ, которое сопоставляет каждому правому идеалу B кольца коэффициентов правый идеал всех тех "рядов", у которых все левые коэффициенты лежат в B. При этом $\lambda(\mu(B)) = B$. Отображение μ осуществляет вложение решётки идеалов кольца коэффициентов в решётку идеалов лорановского кольца.

Доказывается, что отображение μ переводит максимальные правые идеалы в максимальные правые идеалы и, как следствие, радикал Джекобсона лорановского кольца лежит в $\mu(J)$, где J — радикал Джекобсона кольца коэффициентов. Ниже будет доказано, что в некоторых случаях радикал Джекобсона в точности равен $\mu(J)$.

Пятый параграф посвящён явным вычислениям, выяснению необходимых и достаточных условий на коммутирующее соотношение $xa = \ldots$, чтобы оно задавало на множестве рядов Лорана умножение так, чтобы получалось лорановское кольцо. Конечным результатом является предложение 5.5 и предваряющие его леммы:

Лемма 5.2. *Пусть A — кольцо, n — целое число, а $f : A^{+} \longrightarrow V_n$ — гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу $a \in A$ сопоставляет ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$ младшая степень которого не ниже n. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^{+}((x))$, так, что ограничение f' на A будет совпадать с f, для всех рядов r и всех целых k будет выполнено равенство $f'(rx^k) = f'(r)x^k$ и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.*

Если же для всякого элемента a из A младшая степень ряда $f(a)$ равна n, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.

Лемма 5.2, если подойти с топологической точки зрения, является следствием того, что равномерно непрерывную функцию можно единственным образом продолжить со всюду плотного подмножества $A[x, x^{-1}]$ на всё кольцо $A((x))$ с сохранением равномерной непрерывности.

Лемма 5.4. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Пусть $\Delta : A^+ \longrightarrow A^+[[x]]$ — произвольный гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу кольца A сопоставляет ряд без отрицательных степеней переменной с коэффициентами из A. Тогда существует и единственна функция $\omega(\cdot,\cdot)$, которая каждой паре рядов из $A((x))$ сопоставляет ряд из $A((x))$, удовлетворяющая условиям (f, g и h в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A):*

(1) $\omega(f+g,h) \equiv \omega(f,h)+\omega(g,h)$ *и* $\omega(f,g+h) \equiv \omega(f,g)+\omega(f,h)$*;*

(2) *младшая степень ряда* $\omega(f,g)$ *больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x,f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1},f)$ — ровно на единицу меньше;*

(3) $\omega(1,f) \equiv f$*;*

(4) $\omega(af,gx^n) \equiv a\omega(f,g)x^n$*;*

(5) $\omega(x^n,g) \equiv \omega(x,\omega(x^{n-1},g))$ *при* $n>0$ *и* $\omega(x^n,g) \equiv \omega(x^{-1},\omega(x^{n+1},g))$ *при* $n<0$*;*

(6) $\omega(x,\omega(x^{-1},a)) \equiv a$*;*

(7) $\omega(x^{-1},a)=\varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a)$.

Если обозначить за $\overline{\varphi}$ продолжение отображения φ до эндоморфизма $A^+((x))$, которое существует по лемме 5.2 и аналогично за $\overline{\varphi^{-1}}$ и $\overline{\Delta}$ такие же продолжения φ^{-1} и Δ, а за $\gamma(\cdot)$ обозначить эндоморфизм $-\overline{\Delta}(\overline{\varphi^{-1}}(\cdot))$, то для функции ω будет выполнено соотношение

$$\omega(x,a) \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} \overline{\varphi}(\gamma^i(a))x^{i+1},$$

где знак $\sum$ обозначает введённую ранее “обобщённую бесконечную сумму” в кольце $A((x))$.

Предложение 5.5. *Пусть A — кольцо и R — множество с бинарными операциями сложения и умножения. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *кольцо R является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A;*

(2) *существует автоморфизм φ кольца A, гомоморфизм абелевых групп $\Delta : A^+ \longrightarrow A^+[[x]]$ и биективное отображение π из $A((x))$ на R такое, что*
сложение в R задаётся формулой $\pi(f)+\pi(g)=\pi(f+g)$,
а умножение — формулой $\pi(f)\pi(g)=\pi(\omega(f,g))$, где ω — функция, построенная по лемме 5.4 на основе φ и Δ, при этом φ и Δ таковы, что для всех a и b из A выполнено соотношение $\Delta(ab) \equiv \omega(\Delta(a),b)+\varphi^{-1}(a)\Delta(b)$.

Шестой параграф состоит в построении конкретных примеров лорановских колец с помощью результатов предыдущего параграфа. В частном случае, когда $\Delta(A)\subseteq A$, предложение 5.5 позволяет полностью описать лорановские кольца.

А именно, этот случай полностью описывается перестановочным соотношением $x^{-1}a = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \delta(a)$, где φ — произвольный автоморфизм кольца коэффициентов, а δ — φ^{-1}-дифференцирование, то есть эндоморфизм кольца коэффициентов как абелевой группы по сложению, удовлетворяющий соотношению

$$\delta(ab)\equiv\delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b).$$

Кольцо, состоящее из рядов Лорана, в котором умножение задаётся этим соотношением, называется в диссертации кольцом косых рядов Лорана с косым дифференцированием. В случае, когда $\delta\equiv 0$, получаем обычное кольцо косых рядов Лорана. В случае, когда φ — тождественный автоморфизм кольца коэффициентов, получаем, с точностью до замены $t = x^{-1}$ кольцо псевдодифференциальных операторов. Таким образом в диссертации доказывается, что кольцо псевдодифференциальных операторов действительно удовлетворяет всем аксиомам кольца. Для получения примера кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием, не совпадающего ни с одним из названных выше, можно взять любой нетождественный автоморфизм φ и $\delta(a) = c(a - \varphi^{-1}(a))$, где c — фиксированный элемент из центра кольца коэффициентов.

Выбранный в диссертации метод задания умножения и проверки аксиом кольца в кольце псевдодифференциальных операторов позволяет не строить это умножение в явном виде, а построить его с помощью итеративной процедуры и аналогичным образом проверить его ассоциативность (другие аксиомы кольца проверяются тривиально). Такой способ построения позволяет доказать результат в общем виде и воспользоваться им не только в построении кольца псевдодифференциальных операторов, но и в построении кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием. Однако же этот способ не позволяет записать формулу умножения двух рядов в явном виде, в отличие от явной и трудоёмкой вычислительной проверки, которая проделана, например, в [20]. Чтобы компенсировать этот недостаток, явная формула умножения двух рядов выводится в отдельном утверждении:

Предложение 6.4. *Пусть A — кольцо, δ — дифференцирование в нём, и $A((t^{-1},\delta))$ — кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любых двух элементов*

$$f=\sum_{i=-\infty}^{n} f_i t^i \in A((t^{-1},\delta))$$

и

$$g=\sum_{i=-\infty}^{m} g_i t^i \in A((t^{-1},\delta))$$

выполнено равенство

$$fg=\sum_{k=-\infty}^{n+m}\left(\sum_{i=k-m}^{n}\sum_{j=k-i}^{m}\binom{i}{i+j-k} f_i\delta^{i+j-k}(g_j)\right)t^k.$$

Кроме того, в шестом параграфе полностью аналогично хорошо известному полю p-адических чисел строится кольцо дробных n-адических чисел и доказывается, что оно является обобщённым лорановским кольцом с кольцом коэффициентов Z/nZ, но не является лорановским кольцом, поскольку его кольцо коэффициентов в него не вкладывается. Кольцо дробных n-адических чисел является телом только при $n=p^k$ (а при других n не является даже областью), а его кольцо коэффициентов Z/nZ является телом только при $n=p$ (а при других n не является областью). Поэтому кольцо дробных p^k-адических чисел при $k>1$ является примером обобщённого лорановского кольца, которое является телом в то время как его кольцо коэффициентов не является областью.

Вторая глава состоит из шести параграфов. В ней, на базе развитой ранее техники, доказываются конкретные утверждения о тех или иных теоретико-кольцевых свойствах лорановских колец (а также колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов как частных случаях).

В седьмом параграфе доказано, что лорановское кольцо (и, соответственно, кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов) является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом. В восьмом параграфе доказано аналогичное утверждение про нётеровы справа и артиновы справа кольца. Эти утверждения были ранее известны для колец косых рядов Лорана и псевдодифференциальных операторов (см., например, [16, с. 66], [20], [22, с. 19]).

В девятом параграфе получены определённые результаты об областях (доказано, что лорановское кольцо является областью тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является областью, что было хорошо известно в случае кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов) и кольцах главных правых идеалов:

Предложение 9.1. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо, и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R является областью тогда и только тогда, когда кольцо A является областью.*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана является областью тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A является областью.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является областью тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A является областью.*

Для обобщённых лорановских колец утверждение предложения 9.1 остаётся в силе только в одну сторону. Кольцо дробных p^n-адических чисел является телом, а его кольцо коэффициентов (при n больших единицы) не является областью.

Предложение 9.2. *Пусть A — кольцо главных правых идеалов. Тогда:*

(1) *если R — обобщённое лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, то R — кольцо главных правых идеалов;*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана — кольцо главных правых идеалов;*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ — кольцо главных правых идеалов.*

Теорема 9.3. *Пусть R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(1) *R — область главных правых идеалов;*

(2) *R — кольцо главных правых идеалов и A — область;*

(3) *A — область главных правых идеалов.*

Утверждение 9.3, естественно, верно и в случае колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов. Из теоремы 9.4 вытекает, что кольцо рядов Лорана $Z((x))$ над кольцом целых чисел Z является кольцом главных идеалов. В связи с этим заметим, что кольцо многочленов $Z[x]$ и кольцо формальных степенных рядов $Z[[x]]$ не являются кольцами главных идеалов, поскольку идеал, порождённый 2 и x, не является главным. Это показывает, что случай колец рядов Лорана отличается от случаев колец многочленов и колец формальных степенных рядов.

Кроме того, строится пример, показывающий, что аналоги теоремы 9.3 и предложения 9.2 для колец Безу неверны:

Предложение 9.9. *Пусть A — дистрибутивная справа правая область Безу, не являющаяся телом (например, кольцо целых чисел), $B = A(1)\times A(2)\times A(3)\times\ldots$ — прямое произведение счётного числа экземпляров $A(i)$ области A. Тогда:*

(1) *B — риккартово справа и слева дистрибутивное справа редуцированное правое кольцо Безу;*

(2) *$B((x))$ — риккартово справа и слева редуцированное кольцо, которое не является ни правым кольцом Безу, ни дистрибутивным справа кольцом.*

В <u>десятом параграфе</u> получены результаты о простых и полупростых кольцах. Здесь большую роль играют необходимые и достаточные условия на двусторонний идеал B кольца коэффициентов, при которых правый идеал $\mu(B)$ лорановского кольца также является двусторонним. В случае кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов эти условия состоят в инвариантности идеала B относительно скручивающего автоморфизма ($\varphi(B) = B$) или относительно дифференцирования ($\delta(B)\subseteq B$). С учётом этого получены следующие утверждения:

Теорема 10.8. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$A((x,\varphi))$ — простое кольцо;*

(2) *кольцо A не имеет таких нетривиальных двусторонних идеалов B, что $\varphi(B) = B$.*

Теорема 10.9. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$A((t^{-1},\delta))$ — простое кольцо;*

(2) *кольцо A не имеет таких нетривиальных двусторонних идеалов B, что $\delta(B)\subseteq B$.*

Теорема 10.10. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$A((x,\varphi))$ — полупростое артиново кольцо;*

(2) *A — полупростое артиново кольцо.*

Теорема 10.11. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$A((t^{-1},\delta))$ — полупростое артиново кольцо;*

(2) *A — артиново справа кольцо, причём для любого ненулевого элемента j радикала $J(A)$ существует натуральное число n, такое что элемент $\delta^n(j)$ не лежит в $J(A)$.*

В связи с теоремой 10.11 строится пример не полупростого кольца, кольцо псевдодифференциальных операторов над которым является полупростым за счёт выбора подходящего дифференцирования. Этот же пример предоставляет пример цепного артинового кольца, кольцо псевдодифференциальных операторов над которым не является цепным (этот пример интересен в свете описанной ниже теоремы 11.6):

Предложение 10.12. *Пусть F — поле ненулевой характеристики p, $K = F[x]$ — кольцо многочленов. Тогда коммутативное кольцо $A = K/x^pK$ является цепным артиновым, но не является полем. В кольце A можно ввести дифференцирование δ с учетом правил $\delta(x^n) = nx^{n-1}$ и $\delta(a) = 0$ для каждого элемента a из поля F. При этом кольцо $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $p{\times}p$-матриц над полем $F((t^{-p}))$, состоящим из рядов вида $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^{pi}$, где все коэффициенты f_i лежат в F. В частности, $A((t^{-1},\delta))$ — простое артиново кольцо, не являющееся цепным кольцом.*

В одиннадцатом параграфе получены точные критерии для цепных колец, в которых также важную роль играют упомянутые выше условия того, что идеал $\mu(B)$ является двусторонним:

Теорема 11.4. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *R — цепное справа кольцо;*

(2) *R — цепное справа артиново справа кольцо;*

(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\mu(J(A))$ — двусторонний идеал кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Теорема 11.5. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *$A((x,\varphi))$ — цепное справа кольцо;*

(2) *$A((x,\varphi))$ — цепное справа артиново справа кольцо;*

(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Теорема 11.6. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *$A((t^{-1},\delta))$ — цепное справа кольцо;*
(2) *$A((t^{-1},\delta))$ — цепное справа артиново справа кольцо;*
(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\delta(J(A))\subseteq J(A)$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Также получены определённые частичные результаты о полуцепных артиновых кольцах:

Теорема 11.7. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть правый идеал $\mu(J(A))$ является двусторонним идеалом кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *кольцо R является полуцепным справа артиновым справа;*
(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Теорема 11.8. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *кольцо $A((x,\varphi))$ является полуцепным справа артиновым справа;*
(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Теорема 11.9. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём, причём для радикала Джекобсона $J(A)$ кольца A выполнено включение $\delta(J(A))\subseteq J(A)$. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является полуцепным справа артиновым справа;*
(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

В двенадцатом параграфе получены односторонние результаты о дистрибутивных кольцах и о полулокальных кольцах:

Предложение 12.2. *Пусть A — кольцо. Тогда:*
(1) *если R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, и кольцо R полулокально, то кольцо A полулокально;*
(2) *если φ — автоморфизм кольца A, и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана полулокально, то кольцо A полулокально;*
(3) *если δ — дифференцирование кольца A, и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ полулокально, то кольцо A полулокально.*

Предложение 12.3. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, и кольцо R дистрибутивно справа, то и кольцо A дистрибутивно справа;*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

Кроме того, получено полное описание дистрибутивных полулокальных лорановских колец:

Теорема 12.6. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо R дистрибутивно справа и полулокально;*

(2) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа колец;*

(3) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец;*

(4) *A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем правый идеал $\mu(A_i)$ является двусторонним для всех i.*

Теорема 12.7. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо $A((x,\varphi))$ дистрибутивно справа и полулокально;*

(2) *кольцо $A((x,\varphi))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец;*

(3) *кольцо $A((x,\varphi))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец;*

(4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем $\varphi(A_i)=A_i$ для всех i.*

В связи с теоремой 12.7 заметим, что ситуация в случае колец рядов Лорана отличается от случая колец формальных степенных рядов, поскольку можно проверить, что кольцо формальных степенных рядов от одной переменной является прямым произведением конечного числа цепных справа колец тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является конечным прямым произведением тел.

Теорема 12.8. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа и полулокально;*
(2) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец;*
(3) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец;*
(4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем $\delta(A_i)\subseteq A_i$ для всех i.*

Цель работы. Изучение кольцевых свойств колец рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

Методы исследований. В диссертации используются методы структурной и комбинаторной теории колец. Для изучения свойств лорановских колец автором развита особая техника работы с бесконечными формальными суммами элементов этих колец.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и приведены ниже.

1) Получено описание колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов, являющихся областями главных правых идеалов.
2) Описаны простые и полупростые кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов.
3) Выяснено, когда кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов являются полуцепными артиновыми или цепными кольцами.
4) Получено описание дистрибутивных полулокальных колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях в структурной теории колец и теории модулей.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих 12 параграфов, и списков литературы и используемых обозначений. Она изложена на 98 страницах машинописного текста. Список литературы содержит 66 наименований.

Апробация результатов. Результаты диссертации отражены в работах автора [57]–[66]. Они также докладывались на алгебраических семинарах в МГУ, на международном семинаре "Универсальная алгебра и ее приложения" , посвященном памяти Л.А.Скорнякова (Волгоград, 6–11 сентября 1999 г.) , на международной конференции "Formal Power Series and Algebraic Combinatorics" (Москва, 2000), на международном алгебраическом семинаре, посвящённом 70-летию научно-исследовательского семинара

МГУ по алгебре (Москва, 13–16 сентября 2000 г.), на девятых и десятых математических чтениях МГСУ "Математические методы и приложения" (Руза, 2002, 2003 г.г.).

Автор выражает благодарность своим научным руководителям профессору А.В.Михалёву и доценту В.Т.Маркову за постоянное внимание к работе и полезные советы.

Условные обозначения

$A[[x]]$	кольцо формальных степенных рядов	20
$A[x, x^{-1}]$	кольцо многочленов Лорана	21
$A((x, \varphi))$	кольцо косых рядов Лорана	20
$A((x))$	кольцо рядов Лорана (при тождественном скручивающем автоморфизме)	20
$A((t^{-1}, \delta))$	кольцо псевдодифференциальных операторов	22
Q_n	кольцо дробных n-адических чисел	56
$\{U_n\}$	набор подмножеств, задающий Z-фильтрацию обобщённого лорановского кольца	27
V_n	множество рядов Лорана с младшей степенью не ниже n	20
λ	отображение из решётки идеалов обобщённого лорановского кольца в решётку идеалов кольца коэффициентов	35
μ	отображение из решётки идеалов кольца коэффициентов в решётку идеалов лорановского кольца	40
$J(A)$	радикал Джекобсона кольца A	
A^+	аддитивная группа кольца A	
f_i	канонический (левый) коэффициент ряда f при i-ой степени переменной	

Глава 1. Определения и примеры колец рядов Лорана и их обобщений

1 Кольца псевдодифференциальных операторов, кольца рядов Лорана и их обобщения

Если φ — автоморфизм кольца A, то через $A((x,\varphi))$ обозначается *кольцо косых рядов Лорана* над кольцом коэффициентов A, образованное рядами

$$f = \sum_{i=k}^{+\infty} f_i x^i,$$

где x — независимая переменная, k — целое (возможно, отрицательное) число, а все коэффициенты f_i лежат в кольце A. В кольце $A((x,\varphi))$ сложение задается естественным образом, а умножение задается с учетом правила $xa = \varphi(a)x$ (для всех элементов $a \in A$). При $\varphi = 1_A$ получаем обычное (не косое) *кольцо рядов Лорана* $A((x))$.

Если f — некоторый ряд из кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$, и $f = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} f_i x^i$, где $f_k \neq 0$, то произведение $f_k x^k$ называется *младшим членом* ряда f, элемент f_k кольца коэффициентов — *младшим коэффициентом* ряда f, а число k — *младшей степенью* ряда f. Считается, что младшая степень нулевого ряда равна $+\infty$.

Для каждого целого n через V_n обозначается множество всех рядов из $A((x))$, младшая степень которых не ниже n. Множество V_0, состоящее из всех рядов без отрицательных степеней переменной, является подкольцом кольца рядов Лорана $A((x))$, называется *кольцом формальных степенных рядов* и обозначается $A[[x]]$. Кольцо рядов Лорана $A((x))$ совпадает с кольцом частных кольца формальных степенных рядов $A[[x]]$ относительно мультипликативно замкнутого множества $x, x^2, x^3, \ldots$. Подкольцо кольца рядов Лорана $A[x, x^{-1}]$, состоящее из тех рядов, у которых лишь конечное число слагаемых отлично от нуля, называется *кольцом многочленов Лорана.*

Автоморфизм φ кольца A называется *внутренним*, если существует такой обратимый элемент b кольца A, что для всех элементов a кольца A выполнено равенство $\varphi(a) = bab^{-1}$.

Предложение 1.1. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *автоморфизм φ является внутренним;*

(2) *существует изоморфизм π кольца обычных рядов Лорана $A((x))$ на кольцо косых рядов Лорана $A((y, \varphi))$, тождественно действующий на элементах кольца коэффициентов A и сохраняющий младшую степень рядов.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2). Действительно, пусть существует такой обратимый элемент b из A, что $\varphi(a) = bab^{-1}$ для всех a из A. Тогда определим отображение π кольца обычных рядов Лорана $A((x))$ на кольцо косых рядов Лорана $A((y, \varphi))$ с помощью правил $\pi(a) = a$ для всех a из A и $\pi(x^n) = b^{-n}y^n$. Тогда

$$y^n a = \pi(b^n x^n a) = \pi(b^n a b^{-n} b^n x^n) = \varphi^n(a) y^n.$$

Непосредственно проверяется, что заданное такими правилами отображение π является гомоморфизмом колец. Существует обратное ему отображение π^{-1}, задающееся правилами $\pi^{-1}(a) = a$ и $\pi^{-1}(y^n) = b^n x^n$, поэтому π — изоморфизм.

(2)$\Longrightarrow$(1). Пусть π — такой изоморфизм, как описано в условии. Тогда ряд $f = \pi^{-1}(y)$ имеет младшую степень 1 и имеет вид $f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. Ряд $g = \pi^{-1}(y^{-1})$ является обратным к f и имеет степень -1, откуда, приравнивая коэффициенты в равенствах $fg = 1$ и $gf = 1$, сразу получаем $f_1 g_{-1} = 1$ и $g_{-1} f_1 = 1$, откуда $g_{-1} = f_1^{-1}$. Тогда

$$\varphi(a) = yay^{-1} = \pi(f) a \pi(g) = \pi(fag).$$

Поскольку свободный член ряда fag равен $f_1 a f_1^{-1}$, получаем, что выполнено равенство $\varphi(a) = f_1 a f_1^{-1}$, что и требовалось доказать. □

Пусть A — (необязательно коммутативное) кольцо и δ — его *дифференцирование* (то есть эндоморфизм A как абелевой группы по сложению, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$). Тогда через $A((t^{-1}, \delta))$ обозначается *кольцо псевдодифференциальных операторов* над кольцом коэффициентов A, образованное формальными рядами

$$f = \sum_{i=-\infty}^{m} f_i t^i,$$

где t — независимая переменная, m — целое (возможно, отрицательное) число, а коэффициенты f_i ряда f — элементы кольца A. В кольце $A((t^{-1}, \delta))$ сложение определяется обычным образом, а умножение задается с учетом правил

$$ta = at + \delta(a),\ t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1}.$$

Проверка того, что множество $A((t^{-1}, \delta))$ удовлетворяет всем аксиомам кольца, будет дана ниже в предложении 6.2. В случае когда δ — нулевое дифференцирование, существует изоморфизм кольца $A((t^{-1}, \delta))$ на кольцо обычных рядов Лорана $A((x))$ (этот изоморфизм переводит t^{-1} в x).

Конструкция кольца обычных рядов Лорана допускает и другие обобщения. Ниже будет приведено определение лорановского кольца, частными случаями которого являются и кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов.

Представляется естественным попытаться определить кольца рядов Лорана от нескольких переменных:

Пусть A — кольцо. Кольцом рядов Лорана от n переменных называется кольцо $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ формальных сумм вида

$$f = \sum_{i_1=m_1}^{+\infty} \sum_{i_2=m_2}^{+\infty} \ldots \sum_{i_n=m_n}^{+\infty} f_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — произвольные (возможно отрицательные) целые числа, а $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — произвольные элементы кольца A. Сложение и умножение в кольце $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ вводятся обычным образом, с учётом того, что переменные коммутируют друг с другом и с коэффициентами. Отметим, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ абсолютно равноправны и любая их перестановка задаёт корректный автоморфизм кольца $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Замечание. Это не единственное возможное обобщение конструкции рядов Лорана на случай нескольких переменных. Можно рассмотреть *кольцо итерированных рядов Лорана* — когда кольцо рядов Лорана от n переменных $A((x_1))((x_2)) \cdots ((x_n))$ определяется по индукции как кольцо обычных рядов Лорана от переменной x_n с кольцом коэффициентов

$A((x_1))((x_2))\cdots((x_{n-1}))$. При таком определении переменные неравноправны. Свойства кольца итерированных рядов Лорана близки к свойствам кольца обычных рядов Лорана.

Изучение показывает, что свойства колец рядов Лорана от двух и более переменных резко отличаются от свойств кольца рядов Лорана от одной переменной. Пусть A — кольцо, а $A((x,y))$ — кольцо рядов Лорана от двух переменных над ним. Тогда рассмотрим кольца итерированных рядов Лорана $A((x))((y))$ и $A((y))((x))$. Легко видеть, что эти два кольца не совпадают как множества формальных сумм от степеней x и y (так, например, элемент $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i y^{-i}$ лежит в $A((y))((x))$, но не лежит в $A((x))((y))$). Переменные x и y в этих кольцах неравноправны, а перестановка переменных задаёт изоморфизм $A((x))((y))$ на $A((y))((x))$ и наоборот. При этом кольцо $A((x,y))$ является подкольцом кольца $A((x))((y))$ и одновременно кольца $A((y))((x))$ (более того, кольцо $A((x,y))$ в точности совпадает с пересечением $A((x))((y))$ и $A((y))((x))$ как множеств формальных сумм).

При рассмотрении рядов Лорана от одной переменной важную роль играет младший член — член суммы, содержащий наименьшую степень переменной. Для ряда от нескольких переменных понятие младшего члена необходимо уточнить. Если мы рассматриваем ненулевой ряд Лорана от двух переменных x и y, то выберем из всех членов ряда те, в которые x входит в наименьшей степени, а из них выберем тот член, который содержит наименьшую степень переменной y и назовём его младшим членом для перестановки (x, y). Поменяв местами переменные x и y мы получим определение младшего члена (y, x) этого ряда. В случае n переменных для любой заданной перестановки переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно определить свой младший член. Если зафиксировать одну перестановку переменных, то, очевидно, что произведение младших членов двух рядов либо равно нулю, либо равно младшему члену произведения этих двух рядов. В кольце рядов Лорана от двух переменных важной характеристикой ряда является совпадение или несовпадение двух его младших членов.

В следующих главах будет доказано, что кольцо рядов Лорана от одной переменной является телом (артиновым справа кольцом) тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является телом (артиновым справа кольцом). Следующие предложения показывают, что эти утверждения не переносятся на кольца рядов Лорана от нескольких переменных.

Предложение 1.2. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x,y))$ не является артиновым справа кольцом.*

Доказательство. Достаточно доказать, что кольцо $A((x,y))$ содержит необратимый справа элемент, не являющийся левым делителем нуля. Таким элементом является $x + y$.

Действительно, допустим, что f — некоторый ряд из $A((x,y))$, такой, что $(x+y)f=0$. Пусть f_{xy} — младший член (x,y) ряда f. Тогда младший член (x,y) ряда $(x+y)f$ должен быть равен yf_{xy} и, следовательно, отличен от нуля, что противоречит равенству $(x+y)f=0$.

Заметим теперь, что элемент $x+y$ обратим в кольце $A((x))((y))$, причём его обратный равен $(x+y)^{-1}=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(-1)^i x^{-i-1}y^i$, но элемент $(x+y)^{-1}$ не лежит в кольце $A((x,y))$, вложенном в $A((x))((y))$. В силу единственности обратного элемента в кольце $A((x))((y))$, получаем, что элемент $x+y$ не обратим (ни слева ни справа) в кольце $A((x,y))$. Доказательство завершено. □

Замечание. Рассмотренный в доказательстве элемент $x+y$ обратим и в кольце $A((x))((y))$ и в кольце $A((y))((x))$, но его обратные в этих кольцах отличаются друг от друга как формальные суммы одночленов от x и y.

Кольцо A называется *локальным*, если его факторкольцо по радикалу Джекобсона является телом.

Предложение 1.3. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x,y))$ не является локальным.*

Доказательство. Действительно, если $A((x,y))$ локальное кольцо, то либо элемент $(x^{-1}+y^{-1})$ обратим либо элемент $1+(x^{-1}+y^{-1})$ обратим. Пусть один из них (обозначим его f) обратим. Заметим, что младшие члены ряда f равны $f_{xy}=x^{-1}$ и $f_{yx}=y^{-1}$. Тогда пусть g — ряд, обратный к f, а его младшие члены равны g_{xy} и g_{yx} (возможно совпадают). Тогда младшие члены ряда fg равны $x^{-1}g_{xy}$ и $y^{-1}g_{yx}$ и не могут совпадать (поскольку в первый из них x входит в по крайней мере на единицу меньшей степени, чем во второй). Но это противоречит тому, что $fg=1$. □

Кольцо A называется *областью*, если произведение любых двух его ненулевых элементов отлично от нуля. Кольцо A называется *полупримитивным*, если его радикал Джекобсона равен нулю.

Теорема 1.4. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *$A((x,y))$ — полупримитивная область, не являющаяся телом;*
(2) *кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x,y))$ — область;*
(3) *A — область.*

Доказательство. Равносильность условий (3) и (2) легко следует из того, что младший член (x,y) произведения двух рядов равен произведению их младших членов (x,y) и из того, что кольцо A естественным образом вкладывается в $A((x,y))$. Импликация (1)$\Longrightarrow$ (2) тривиальна. Остаётся доказать импликацию (3),(2)$\Longrightarrow$ (1).

Действительно, пусть f — ненулевой ряд, лежащий в радикале Джекобсона кольца $A((x,y))$. Тогда пусть $f_{xy} = ax^l y^n$ и $f_{yx} = bx^k y^m$ — его младшие члены (x,y) и (y,x) соответственно (при этом $l \leq k$ и $m \leq n$). Заменив в случае необходимости f на $fx^{-l}y^{-m}$, мы можем считать, что $l = 0$, $m = 0$ и $f_{xy} = ay^n$, $f_{yx} = bx^k$. Допустим, что $f_{xy} = f_{yx}$, тогда $n = k = 0$. Тогда заменим f на $g = f(x+y)$ и получим, что $g_{xy} \neq g_{yx}$. Поэтому можно считать, что $f_{xy} \neq f_{yx}$ и $n > 0$, $k > 0$. Ряд f лежит в радикале Джекобсона кольца $A((x,y))$, поэтому ряд $1 + x^{-1}y^{-1}f$ обратим, но тогда обратим и ряд $g = xy + f$. Нетрудно видеть, что младшие члены ряда g равны $g_{xy} = f_{xy} = ay^n$ и $g_{yx} = f_{yx} = bx^k$ и, следовательно, не совпадают друг с другом. Пусть h — ряд, обратный к ряду g. Пусть h_{xy} и h_{yx} — его младшие члены (возможно, они совпадают). Тогда младшие члены ряда gh равны, соответственно, $h_{xy}g_{xy}$ и $h_{yx}g_{yx}$. Нетрудно видеть, что младшие члены ряда gh также не совпадают друг с другом. Но h — обратный к g, поэтому $gh = 1$. Получено противоречие.

Осталось доказать, что кольцо $A((x,y))$ не является телом — это следует, например, из предложения 1.2. □

2 Определения лорановского кольца

Из определений кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и кольца псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ над одним и тем же кольцом коэффициентов A нетрудно заметить, что между этими двумя кольцами есть естественная биекция, переводящая x в t^{-1}, а формальные суммы степеней x в соответствующие формальные суммы степеней t^{-1}. Эта биекция является изоморфизмом левых модулей ${}_AA((x,\varphi))$ и ${}_AA((t^{-1},\delta))$ над кольцом A. Такое сходство этих двух конструкций придаёт им близкие кольцевые свойства и даёт возможность в некоторых случаях доказывать одинаковые теоремы для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов, причём доказательства совпадают почти дословно.

В связи с этим будет удобно определить лорановское кольцо, частными случаями которого будут являться кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов и доказать возможно большее число теорем в такой общности. Будет дано два определения лорановского кольца и доказана их эквивалентность:

Определение 1. Кольцо R называется *лорановским кольцом* с кольцом коэффициентов A, если существует изоморфизм π абелевой группы по сложению кольца рядов Лорана $A^+((x))$ на абелеву группу по сложению R^+, обладающий перечисленными ниже свойствами:

(1) ограничение отображения π на кольцо A является унитарным кольцевым мономорфизмом кольца A в кольцо R;
(2) π осуществляет изоморфизм левого модуля ${}_A A((x))$ на левый модуль ${}_A R$, где модуль ${}_A R$ определяется в соответствии с правилом $ar = \pi(a)r$;
(3) младшая степень произведения двух рядов больше или равна суммы их младших степеней;
(4) ограничение отображения π на группу по умножению, порождённую элементом x, является групповым мономорфизмом.

Замечание. Если отождествить каждый ряд f из кольца рядов Лорана $A((x))$ с соответствующим ему элементом $\pi(f)$ лорановского кольца, то, в связи с доказанной ниже леммой 2.1, определение можно дать так: абелева группа $A^+((x))$ с введённым на ней умножением $\circ$ называется лорановским кольцом, если она является кольцом, удовлетворяет соотношению $(af)\circ(gx^n) = a(f\circ g)x^n$, где $a\in A$, и при этом младшая степень произведения двух рядов больше или равна суммы их младших степеней. Очевидно, что само кольцо $A((x))$ является лорановским кольцом при $\pi = 1_{A((x))}$.

Докажем несколько простых свойств отображения π:

Лемма 2.1. *Пусть R — лорановское кольцо с отображением π из $A((x))$ в R, как в определении. Тогда для любого ряда f из $A((x))$ и любого элемента a кольца A выполнено равенство $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$. А для любого ряда f из $A((x))$ и любого целого числа n выполнено равенство $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$.*

Доказательство. Из условия (2) вытекает, что для всех элементов a и b из кольца A и всех целых чисел n выполнено равенство $\pi(a)\pi(bx^m) = \pi(abx^m)$, а из условия (4) вытекает, что для любого элемента a из кольца A и для любых целых n и m выполнено равенство $\pi(bx^m)\pi(x^n) = \pi(bx^{n+m})$. Таким образом равенства $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$ и $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$ доказаны, когда f имеет вид bx^m. По закону дистрибутивности умножения эти равенства сразу распространяются на любые конечные суммы одночленов вида bx^m, то есть на всё кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$. Для любого ряда f из $A((x))$ и для любого целого m можно найти такой многочлен Лорана f', что $f - f'\in V_m$, откуда

$$\pi(a)\pi(f) - \pi(af) = \pi(a)\pi(f - f') - \pi(a(f - f'))\in\pi(V_m).$$

В силу произвольности m получаем $\pi(a)\pi(f) - \pi(af) = 0$, что и означает, что равенство $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$ распространяется на все ряды f из $A((x))$.

Аналогично равенство $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$ распространяется на все ряды f из $A((x))$ $\square$

Теперь дадим другое определение лорановского кольца:

Определение 2. Кольцо R называется *лорановским кольцом*, если в нём определён набор подгрупп по сложению $\{U_i | -\infty < i < +\infty\}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

(i) для всех целых n и k выполнены включения $U_{n+1} \subseteq U_n$ и $U_n U_k \subseteq U_{n+k}$ (в частности, отсюда следует, что U_0 — подкольцо в R, а U_1 — двусторонний идеал в U_0). Кроме того, объединение U_n по всем целым n даёт всё кольцо R, а пересечение U_n по всем целым n состоит из одного нуля;

(ii) существует пара элементов $y \in U_1$ и $y^{-1} \in U_{-1}$ таких, что $yy^{-1} = y^{-1}y = 1$ (с учётом условия (i) отсюда легко получается, что $1 = yy^{-1} \in U_0$, то есть что U_0 — унитарное подкольцо);

(iii) для любого набора $u_n \in U_n, u_{n+1} \in U_{n+1}, u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ найдётся элемент $u \in U_n$ (*обобщённая бесконечная сумма* элементов u_i) такой, что для всех натуральных k выполнено включение

$$(u - \sum_{i=n}^{n+k} u_i) \in U_{n+k+1};$$

(iv) канонический кольцевой гомоморфизм кольца U_0 на своё факторкольцо $A = U_0/U_1$ расщепляется, то есть существует вложение $\pi : A \longrightarrow R$, такое, что его композиция с каноническим гомоморфизмом U_0 на A даёт тождественный автоморфизм кольца A.

Замечание. Условие (i) требует, чтобы R было Z-фильтрованным кольцом. Остальные условия накладывают дополнительные ограничения на эту фильтрацию. Условие (ii) составляет специфику рядов с *отрицательными степенями* переменной — например, кольцо формальных степенных рядов удовлетворяет всем условиям, кроме (ii). Условие (iii) составляет специфику *бесконечных рядов* — например, кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$ удовлетворяет всем условиям, кроме (iii). Наконец, условие (iv), необязательное для доказательства некоторых утверждений, требует существования естественного вложения кольца коэффициентов в обобщённое кольцо рядов. Ниже будет построен пример кольца дробных n-адических чисел Q_n, удовлетворяющего условиям (i)-(iii), но не удовлетворяющего условию (iv).

Если R — кольцо, удовлетворяющее условиям (i) и (ii) второго определения лорановского кольца, то факторкольцо $A = U_0/U_1$ называется его *кольцом коэффициентов*. Ниже будет доказано, что кольцо косых рядов

Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов являются лорановскими кольцами так, что понятие кольца коэффициентов в них совпадает с обычным определением.

Отметим, что определение 2, в отличие от определения 1, симметрично относительно умножения справа или слева. Следующее предложение доказывает эквивалентность определений 1 и 2.

Предложение 2.2. *Всякое лорановское кольцо R по определению 1 является также и лорановским кольцом по определению 2 с набором подмножеств $U_n = \pi(V_n)$, причём кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу A. Кроме того, всякое лорановское кольцо R по определению 2 является также и лорановским кольцом по определению 1 с кольцом коэффициентов $A = U_0/U_1$.*

Доказательство. Действительно, пусть R — лорановское кольцо по определению 1 с кольцом коэффициентов A. Положим $U_n = \pi(V_n)$ для каждого целого n. Условие (i) проверяется непосредственно, в качестве двух взаимно обратных элементов для условия (ii) можно взять $y = \pi(x)$ и $y^{-1} = \pi(x^{-1})$.

Поскольку в кольце $A((x))$ выполнены равенства $A \bigcap V_1 = 0$ и $A + V_1 = V_0$, то в кольце R выполнены равенства $\pi(A) \bigcap U_1 = 0$ и $\pi(A) + U_1 = U_0$. Отсюда сразу вытекает, что кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу $\pi(A)$ и, следовательно, кольцу A. При этом кольцо $\pi(A) \cong U_0/U_1$ лежит в кольце U_0, поэтому канонический гомоморфизм $U_0 : \longrightarrow U_0/U_1$ расщепляется, что и доказывает, что выполнено условие (iv). Остаётся доказать, что выполнено условие (iii).

Действительно, пусть есть набор элементов

$$u_n \in U_n,\ u_{n+1} \in U_{n+1},\ u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$$

из кольца R. Пусть $f_k = \pi^{-1}(u_k) \in V_k$. Обозначим за $f_{k,i}$ соответствующий коэффициент ряда f_k так, чтобы выполнялось равенство

$$f_k = f_{k,k} x^k + f_{k,k+1} x^{k+1} + \ldots,$$

и составим ряд f, у которого коэффициент при x^k будет равняться $\sum\limits_{i=n}^{k} f_{i,k}$ для целых k больше либо равных n (коэффициенты при степенях, меньших n, положим равными нулю). Положим теперь $u = \pi(f)$. Непосредственно проверяется, что элемент u удовлетворяет условию (iii) как “обобщённая бесконечная сумма” элементов u_n.

Пусть теперь R — лорановское кольцо по определению 2, а $A = U_0/U_1$ — его кольцо коэффициентов. Пусть π — существующее по пункту (iv) вложение кольца A в U_0. Продолжим вложение π до вложения $A((x))$ в R

следующим образом. Положим $\pi(x)$ и $\pi(x^{-1})$ равными двум взаимно обратным элементам, которые существуют по условию (ii) (так, чтобы выполнялись включения $\pi(x)\in U_1$ и $\pi(x^{-1})\in U_{-1}$). Соответственно для любого элемента a из кольца A и любого натурального n положим

$$\pi(ax^n) = \pi(a)(\pi(x))^n \in U_n \text{ и } \pi(ax^{-n}) = \pi(a)(\pi(x^{-1}))^n \in U_{-n}.$$

Теперь для каждого ряда $f = f_n x^n + f_{n+1}x^{n+1} + \ldots$ положим $\pi(f)$ равным "обобщённой бесконечной сумме" элементов $\pi(f_k x^k)$ для целых k больше либо равных n. Такая "обобщённая бесконечная сумма" существует по условию (iii). Непосредственно проверяется условие (1) определения 1 и, то, что π — корректно определённый гомоморфизм левых модулей, осуществляющий вложение $A((x))$ в R, и что для любого целого n верно нестрогое включение $\pi(V_n)\subseteq U_n$ (где V_n, как в определении 1 — множество всех рядов, в которые x входит в степени не ниже n). Легко видеть, что условие (4) определения 1 выполнено автоматически, в силу определения гомоморфизма π.

Докажем теперь, что π — сюръективное отображение. Пусть r — произвольный элемент кольца R, обозначим за n наибольшее целое число такое, что r лежит в U_n (в силу условия (i) такое n существует). Тогда $r\pi x^{-n}$ лежит в U_0. Обозначим за r_n образ элемента $r\pi x^{-n}$ при каноническом гомоморфизме $U_0 : \longrightarrow U_0/U_1 = A$. Тогда элемент $r - \pi(r_n x^n)$ лежит в U_{n+1}. Применив к элементу $r - \pi(r_n x^n)$ ту же процедуру, что и к r, получим, что элемент $r - \pi(r_n x^n) - \pi(r_{n+1}x^{n+1})$ лежит в U_{n+2}. Продолжим эту процедуру до бесконечности и получим последовательность элементов r_k из A. Непосредственно проверяется, что для ряда $f = r_n x^n + r_{n+1}x^{n+1} + \ldots$ выполнено равенство $\pi(f) = r$, таким образом $\pi(A((x))) = R$, и тогда π — изоморфизм левых модулей над A. Из построения видно также, что $\pi^{-1}(U_n)\subseteq V_n$ (с учётом $\pi(V_n)\subseteq U_n$ получаем $\pi(V_n) = U_n$), поэтому выполнено условие (3) определения: действительно, $\pi(V_n)\pi(V_m) = U_n U_m \subseteq U_{n+m} = \pi(V_{n+m})$. Таким образом доказано, что выполнены все условия определения 1 и доказательство завершено. $\square$

В силу эквивалентности двух определений иногда в дальнейшем они не будут различаться, а будет говориться просто об условиях (1), (2), (3), (4) или (i), (ii), (iii), (iv). Кроме того, поскольку существует вложение кольца коэффициентов в лорановское кольцо, в тех случаях, когда это не вызывает путаницы, будем полагать, что кольцо коэффициентов лежит в лорановском кольце.

Покажем ещё, что понятие "обобщённой бесконечной суммы", введённое во втором определении лорановского кольца, согласовано с формальной бесконечной суммой в кольце $A((x))$.

Лемма 2.3. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть π — биекция из $A((x))$ на R, как в первом определении лорановского кольца. Тогда для любой последовательности элементов $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ из кольца A, элементы $\pi(a_i x^i)$ образуют "обобщённую бесконечную сумму", равную $\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots)$.*

Доказательство. Действительно, элемент $\pi(a_i x^i)$ лежит в $U_i = \pi(V_i)$, поэтому элементы $\pi(a_i x^i)$ образуют "обобщённую бесконечную сумму". Остаётся доказать, что для любого $k > n$ разность

$$\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \sum_{i=n}^{i\leq k} \pi(a_i x^i)$$

лежит в U_{k+1}. Но

$$\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \sum_{i=n}^{i\leq k} \pi(a_i x^i) =$$

$$= \pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \pi(\sum_{i=n}^{i\leq k} a_i x^i) =$$

$$= \pi(a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \ldots) \in \pi(V_n) = U_n,$$

что и завершает доказательство. □

3 Обобщённые лорановские кольца

Часть результатов будет доказана для более широкого класса колец, чем лорановские кольца — а именно для тех колец, которые удовлетворяют только условиям (i)-(iii) второго определения лорановского кольца. Эти кольца будут называться *обобщёнными лорановскими кольцами.* Ниже будет приведён пример кольца Q_n, которое является обобщённым лорановским кольцом, но не является лорановским кольцом.

В условии (iii) вводится понятие "обобщённой бесконечной суммы" для некоторых наборов слагаемых. Ниже будет показано, что это есть просто сумма абсолютно сходящегося в некоторой топологии ряда. А пока докажем некоторые простые свойства этой суммы, которые позволят обращаться с ней достаточно свободно:

Лемма 3.1. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо. Будем обозначать “обобщённую бесконечную сумму” обычным знаком $\sum$. Тогда:*

(1) *обобщённая сумма элементов $u_n{\in}U_n, u_{n+1}{\in}U_{n+1}, u_{n+2}{\in}U_{n+2}, \ldots$ определена единственным образом — то есть найдётся ровно один элемент, удовлетворяющий условию (iii);*

(2) *для любого целого n выполнено равенство*

$$\sum_{i=n}^{+\infty} 0 = 0;$$

(3) *если элементы*

$$u_n{\in}U_n, u_{n+1}{\in}U_{n+1}, u_{n+2}{\in}U_{n+2}, \ldots$$

и элементы

$$v_m{\in}U_m, v_{m+1}{\in}U_{m+1}, v_{m+2}{\in}U_{m+2}, \ldots$$

образуют “обобщённую бесконечную сумму”, причём есть биективное отображение η из неотрицательных целых чисел на неотрицательные целые числа такое, что $u_{n+i} = v_{m+\eta(i)}$ для всех целых неотрицательных i, то выполнено равенство

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=m}^{+\infty} v_i;$$

(4) *пусть r — произвольный элемент кольца R, а элементы*

$$u_n{\in}U_n, u_{n+1}{\in}U_{n+1}, \quad u_{n+2}{\in}U_{n+2}, \ldots$$

образуют “обобщённую бесконечную сумму”, тогда выполнены равенства

$$r\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=n}^{+\infty} r u_i,$$

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i r = \sum_{i=n}^{+\infty} u_i r,$$

причём правая их часть всегда определена;

(5) *если $u_n{\in}U_n, u_{n+1}{\in}U_{n+1}, u_{n+2}{\in}U_{n+2}, \ldots$ — элементы, образующие “обобщённую бесконечную сумму”, то для любого целого $m > n$ выполнено равенство*

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=n}^{m-1} u_i + \sum_{i=m}^{+\infty} u_i,$$

где выражение

$$\sum_{i=n}^{m-1} u_i$$

обозначает обыкновенную конечную сумму, причём правая часть всегда определена;

(6) *для любого такого набора элементов* $\{u_{i,j} | n \leq i < +\infty,\ m \leq j < +\infty\}$, *что* $u_{i,j} \in U_{i+j}$, *выполнено равенство*

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{i=n+m}^{+\infty} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j},$$

причём обе его части всегда определены.

(7) *для любого такого набора элементов* $\{u_{i,j} | n \leq i < +\infty,\ m \leq j < +\infty\}$, *что* $u_{i,j} \in U_{i+j}$, *выполнено равенство*

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=m}^{+\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,j},$$

причём обе его части всегда определены.

Доказательство. (1) Действительно, допустим, существует два разных элемента u и v, удовлетворяющих условию (iii). Тогда по условию для каждого натурального k выполнены включения

$$u - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1}$$

и

$$v - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1},$$

поэтому $u - v \in U_{k+1}$, откуда, в силу произвольности k, имеем $u - v = 0$, что и требовалось доказать.

(2) Утверждение проверяется непосредственно.

(3) Обозначим бесконечную сумму u_i за u, а бесконечную сумму v_i за v. Для того, чтобы доказать, что $u = v$, достаточно доказать, что для всех целых k, больших некоторого, выполнено включение $u - v \in U_k$. Пусть k' — максимальное значение, принимаемое функцией $m + \eta(i)$ при $i \leq k - n$, а k'' — максимум из двух чисел k и k'. Тогда

$$u - v = \left(u - \sum_{i=n}^{k} u_i\right) + \left(\sum_{i=n}^{k} u_i - \sum_{i=m}^{k''} v_i\right) - \left(v - \sum_{i=m}^{k''} v_i\right),$$

где первое и третье слагаемое лежат в U_{k+1} по определению "обобщённой бесконечной суммы". Остаётся доказать, что второе слагаемое также лежит в U_k.

Действительно, по условию и по выбору k'' сумма

$$\sum_{i=m}^{k''} v_i$$

содержит все те же члены, что и сумма

$$\sum_{i=n}^{k} u_i,$$

а также некоторые дополнительные члены v_i, для всех из которых выполнено условие $\eta^{-1}(i-m) > k-n$. Но если $\eta^{-1}(i-m) > k-n$, то $v_i = u_{n+\eta^{-1}(i-m)} \in U_{k+1}$, что и завершает доказательство.

(4) Пусть младшая степень элемента r равна m. Тогда если u_i лежит в U_i, то $u_i r$ и $r u_i$ лежат в U_{i+m}, поэтому правые части доказываемых равенств определены. Равенства доказываются полностью аналогично друг другу, для определённости докажем первое. Надо доказать, что элемент

$$r \sum_{i=n}^{+\infty} u_i$$

удовлетворяет условию (iii) для набора элементов $\{r u_i\}$. Действительно, для всех целых k имеем

$$r \sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} r u_i = r \left(\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} u_i \right) \in U_{n+m},$$

что и требовалось доказать.

(5) Действительно, если набор элементов $u_n, u_{n+1}, \ldots$ удовлетворяет условиям “обобщённой бесконечной суммы”, то и набор $u_m, u_{m+1}, \ldots$ удовлетворяет им. Для любого целого $k > m$ имеем

$$\left(\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{m-1} u_i \right) - \sum_{i=m}^{k} u_i =$$

$$= \sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1},$$

что означает, в соответствии с условием (iii), что

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{m-1} u_i = \sum_{i=m}^{+\infty} u_i,$$

что и требовалось доказать.

(6) Действительно, по условию (iii) для всех $i \geq n$ выполнено включение

$$\sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} \in U_{i+m},$$

поэтому левая часть требуемого равенства всегда определена. Поскольку

$$\sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j} \in U_i,$$

то определена и правая часть, осталось доказать их равенство.

Действительно, достаточно доказать, что для всех достаточно больших целых k разность

$$\sum_{i=n}^{+\infty}\sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{+\infty}\sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}. Для этого достаточно доказать, что разность

$$\sum_{i=n}^{k-m}\sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{k}\sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}, а для этого достаточно доказать, что разность

$$\sum_{i=n}^{k-m}\sum_{j=m}^{k-n} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{k}\sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}. Но последнее равенство содержит только конечные суммы и непосредственно следует из того, что $u_{i,j}{\in}U_{i+j}$.

(7) Требуемое равенство следует из пункта (6), применённого по отдельности к правой и левой частям требуемого равенства. $\square$

Замечание. Во избежание конфликта обозначений, обозначение $\sum$ для "обобщённой бесконечной суммы" не выносится за пределы доказанной выше леммы, так как в кольцах рядов Лорана, кольцах псевдодифференциальных операторов и т.д. знак $\sum$ будет использован для обозначения формальной записи бесконечных рядов. Во всех этих кольцах, однако, формальная запись $\sum$ будет являться частным случаем "обобщённой бесконечной суммы".

Нам потребуются следующие обозначения:

Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, а $\{U_i\}$ — набор множеств в нём, как в определении 2. Тогда для каждого элемента из U_0 назовём его *свободным членом* его образ при каноническом гомоморфизме U_0 на $A = U_0/U_1$. В случае кольца рядов Лорана это определение совпадает с естественным определением свободного члена, поэтому свободный член (когда он определен) элемента f будет обозначаться через f_0. Легко видеть, что свободный член суммы (произведения) двух элементов из U_0 равен сумме (произведению) их свободных членов.

Для каждого ненулевого элемента f из R назовём его *младшей степенью* целое число n такое, что f лежит в U_n и не лежит в U_{n+1} (для кольца обычных рядов Лорана младшая степень совпадает со степенью младшего члена). Иногда будет удобно считать, что младшая степень нуля равна плюс бесконечности. Младшая степень определена единственным образом. Элементы с младшей степенью 0 — это в точности все элементы из U_0 с ненулевым свободным членом. Каждый ненулевой элемент f кольца R может быть представлен в виде произведения вида uy^n (и в виде $y^n u$), где $u \in U_0$ — элемент с ненулевым свободным членом, y — обратимый элемент, описанный в условии (ii), а n — младшая степень f. Из этого сразу вытекает, что для любых целых n и m выполнено равенство $y^n U_m = U_{n+m}$.

Пусть R — обобщённое лорановское кольцо и y — какой-либо обратимый элемент, описанный в условии (ii). Если $u_0 + U_1$ — какой-либо элемент кольца коэффициентов U_0/U_1, то для любого целого n элемент $y^n u_0 y^{-n} + U_1$ также является элементом кольца коэффициентов и не зависит от выбора конкретного представителя u_0 (поскольку $y^n U_1 y^{-n} = U_1$). Поэтому отображение $\varphi : u_0 + U_1 \longrightarrow y u_0 y^{-1} + U_1$ задаёт автоморфизм кольца коэффициентов, причём φ^n переводит элемент $u_0 + U_1$ в $y^n u_0 y^{-n} + U_1$. В случае кольца косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ и элемента y, равного x, этот автоморфизм совпадает с автоморфизмом, задающим косое умножение в кольце косых рядов Лорана, поэтому для него используется то же самое обозначение φ и он будет называться *скручивающим автоморфизмом* обобщённого лорановского кольца. Скручивающий автоморфизм, вообще говоря, зависит от выбора конкретного элемента y. В случае кольца псевдодифференциальных операторов и элемента $y = t^{-1}$ этот автоморфизм является тождественным автоморфизмом кольца коэффициентов.

Для каждого подмножества P обобщённого лорановского кольца R обозначим за $\lambda(P)$ образ множества $U_0 \bigcap P$ при каноническом гомоморфизме U_0 на U_0/U_1 (то есть $\lambda(P)$ — это множество всех свободных членов всех рядов из $U_0 \bigcap P$). Непосредственно проверяется, что если P — левый (правый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ является левым (правым) идеалом кольца коэффициентов $A = U_0/U_1$. Таким образом отображение λ осуществляет отображение решётки левых (правых) идеалов кольца R в решётку левых (правых) идеалов кольца A, причём это отображение сохраняет отношение включения. Кроме того, если P — ненулевой правый (левый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ — ненулевой правый (левый) идеал (действительно, если $f \in P$ и n — целое число такое, что $f \in U_n \setminus U_{n+1}$, то $fx^{-n} \in U_0 \bigcap P$ или $x^{-n} f \in U_0 \bigcap P$, при этом элементы fx^{-n} и $x^{-n} f$ имеют ненулевые свободные члены).

Докажем теперь некоторые вспомогательные утверждения о лорановских кольцах, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 3.2. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов и A — область. Тогда для любых двух ненулевых элементов f и g из R младшая степень их произведения равна сумме их младших степеней.*

Доказательство. Действительно, если n — младшая степень элемента f, а k — младшая степень элемента g, то найдутся такие элементы f' и g' из $U_0 \setminus U_1$, что $f = y^n f'$ и $g = g' y^k$. Поскольку элементы f' и g' имеют ненулевые свободные члены, то и их произведение $f'g'$ имеет ненулевой свободный член и, следовательно, лежит в $U_0 \backslash U_1$.

Произведение $fg = y^n f' g' y^k$ лежит в U_{n+k}. Допустим, оно лежит также в U_{n+k+1}, тогда произведение $f'g' = y^{-n} f g y^{-k}$ лежит в U_1, чего не может быть. Таким образом, произведение $fg = y^n f' g' y^k$ лежит в $U_{n+k} \backslash U_{n+k+1}$, что и требовалось доказать. □

Лемма 3.3. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов, P — правый идеал в R. Допустим, что существуют такие элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $P \bigcap U_0$, что для каждого элемента g из $P \bigcap U_0$ выполнено включение $g_0 \in f_{1,0}A + f_{2,0}A + \ldots + f_{n,0}A$, где $f_{i,0}$ — это свободный член элемента f_i, а g_0 — свободный член элемента g.*

Тогда правый идеал P порождается n элементами $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Доказательство. Обозначим через Q правый идеал $f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$ кольца R. Так как все элементы f_i лежат в идеале P и $Q = f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$, то $Q \subseteq P$. Допустим, что утверждение леммы не верно. Тогда существует ряд $h \in P$ такой, что $h \notin Q$. Без ограничения общности можно считать, что $h \in U_0$ (если это не так, то можно домножить h на элемент y из условия (ii) в соответствующей степени). Пусть h_0 — свободный член элемента h. По условию $h_0 = f_{1,0}a_{1,0} + f_{2,0}a_{2,0} + \ldots + f_{n,0}a_{n,0}$ для некоторых элементов $a_{1,0}, \ldots, a_{n,0}$ кольца A. Рассмотрим элемент

$$(h - (f_1 a_{1,0} + \ldots + f_n a_{n,0}))y^{-1} = h' \in U_0.$$

Элемент h' также лежит в $P \bigcap U_0$ и к нему применимо условие леммы: $h'_0 = f_{1,0}a_{1,1} + f_{2,0}a_{2,1} + \ldots + f_{n,0}a_{n,1}$. Ряд h'' положим равным

$$(h' - (f_1 a_{1,1} + \ldots + f_n a_{n,1}))y^{-1}.$$

Цепочку $h, h', h'', \ldots$ можно продолжить до бесконечности. Непосредственно проверяется, что выполнено равенство (в смысле “обобщённых бесконечных сумм”, которые существуют по условию (iii))

$$h = f_1(a_{1,0} + a_{1,1}y + a_{1,2}y^2 + \ldots) + \ldots + f_n(a_{n,0} + a_{n,1}y + \ldots).$$

Это противоречит предположению $h \notin Q$. □

Замечание. Аналог леммы 3.3 для левых идеалов также верен.

В качестве простого следствия этой леммы можно получить следующее утверждение (его частные случаи для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов хорошо известны):

Предложение 3.4. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда если свободный член элемента $r\in U_0$ обратим справа (слева) в кольце A, то и сам элемент r обратим справа (слева) в кольце R. Кроме того, если A — тело, то и R — тело.*

Доказательство. Действительно, пусть свободный член элемента r обратим справа. Тогда применим лемму 3.3, положив n равным 1, f_1 равным r, а идеал P равным всему кольцу R. Получим, что $R = P = rR$, то есть что элемент r обратим справа.

Пусть теперь A — тело, тогда из уже доказанного вытекает, что всякий элемент u из U_0 с ненулевым свободным членом обратим справа (и слева). Но всякий ненулевой элемент r кольца R может быть представлен в виде произведения uy^n, где $u\in U_0$ имеет ненулевой свободный член, а y — обратимый элемент. Поэтому r является произведением двух обратимых элементов и, следовательно, обратим. $\square$

Ниже будет доказано, что для лорановских колец предложение 3.4 можно усилить и доказать, что лорановское кольцо является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом. Для обобщённых лорановских колец это неверно, соответствующий пример будет построен ниже (кольцо дробных p^n-адических чисел Q_{p^n}, при $n > 1$, которое является телом в то время как его кольцо коэффициентов не является областью).

Продемонстрируем, что к введённому в определении лорановского кольца понятию "обобщённой бесконечной суммы" можно подойти с топологической точки зрения, представив его как сумму ряда, абсолютно сходящегося в определённой топологии.

Кольцо A с введённой на нём функцией $\|\cdot\|$ в $[0; +\infty)$ называется *нормированным кольцом*, если:

(1) равенство $\|x\| = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(2) для всех элементов x и y из кольца A выполнено неравенство $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$;

(3) для всех элементов x и y из кольца A выполнено неравенство $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$;

(4) выполнены равенства $\|1\| = \|-1\| = 1$.

В нормированном кольце обычным образом вводятся метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и топология, при этом операции умножения и сложения в кольце оказываются равномерно непрерывными функциями от двух переменных. Покажем, что на обобщённом лорановском кольце можно естественным образом ввести топологию, согласованную с нормой:

Предложение 3.5. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, а $f : Z \longrightarrow (0; +\infty)$ — строго монотонно убывающая функция от целого аргумента, обладающая свойствами*

$$f(n+m) \leq f(n)f(m), \quad f(0) = 1 \text{ и } \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$$

(например, можно взять функцию $f(n) = 2^{-n}$).

Тогда на R можно ввести норму так, что

> *$\|0\| = 0$ и для ненулевого элемента r из R с младшей степенью n его норма $\|r\|$ равна $f(n)$,*
>
> *R с такой нормой будет нормированным кольцом, причем порождаемая нормой топология при этом не зависит от выбора конкретной функции f,*
>
> *R — полное метрическое пространство и всякое унитарное подкольцо R', удовлетворяющее условию $\lambda(R') = A$ и содержащее хотя бы одну пару взаимно обратных элементов из U_1 и U_{-1}, всюду плотно в R,*
>
> *отображение π из $A((x))$ в R, как в определении лорановского кольца, является гомеоморфизмом топологических пространств, если в $A((x))$ ввести топологию таким же образом, как в R.*

Доказательство. То, что для кольца R с указанной нормой выполнены все условия определения нормированного кольца, следует из свойств функции f и из того, что младшая степень произведения двух элементов кольца R больше или равна суммы их младших степеней, а младшая степень суммы двух элементов кольца R больше или равна минимума их младших степеней.

Для того, чтобы проверить, что порождаемая нормой топология не зависит от выбора функции f, достаточно доказать, что фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из окрестностей вида $U'_\varepsilon = \{r | \|r\| < \varepsilon\}$ при $0 < \varepsilon < 1$ не зависит от выбора функции f. Действительно,

$$U'_\varepsilon = \{r | \|r\| < \varepsilon\} = \bigcup_{f(n)<\varepsilon} U_n = U_{g(\varepsilon)},$$

где $g(\varepsilon)$ — минимальное натуральное число n такое, что $f(n) < \varepsilon$. Из свойств функции f следует, что $g(\varepsilon)$ пробегает все натуральные числа при $0 < \varepsilon < 1$, поэтому фундаментальная система окрестностей нуля состоит из U_n при $n > 0$ и только из них. Таким образом, эта система не зависит от выбора функции f.

Проверим, что R — полное метрическое пространство. Действительно, пусть есть последовательность Коши $\{r_n\}$ элементов из кольца R. Выделим из неё подпоследовательность $\{r'_n\}$ такую, что для всех натуральных n выполнено неравенство $\|r'_{n+1}-r'_n\|\leq f(n)$. Тогда для всех натуральных n выполнено включение $r'_{n+1}-r'_n\in U_n$. По условию (iii) определения лорановского кольца это означает, что существует "обобщённая бесконечная сумма" s элементов всех $r'_{n+1}-r'_n$ при $n\geq 1$. Тогда элемент $r=r_1+s$ будет пределом последовательности $\{r'_n\}$, а значит и последовательности $\{r_n\}$. Докажем это.

Действительно, по определению "обобщённой бесконечной суммы" для всех натуральных n выполнено включение

$$r-r'_n=s-\sum_{i=1}^{n-1}(r'_{i+1}-r'_i)\in U_n,$$

которое и означает, что $\|r-r'_n\|\leq f(n)$, откуда без труда получаем, что элемент r равен пределу последовательности $\{r'_n\}$.

Пусть теперь R' — подкольцо кольца R, удовлетворяющее условию $\lambda(R')=A$ и содержащее пару взаимно обратных элементов y из U_1 и y^{-1} из U_{-1}. Пусть r — произвольный ненулевой элемент кольца R с младшей степенью n. Нужно доказать, что для любого целого k найдётся $r_k\in R'$ такое, что $r-r_k\in U_k$. Будем доказывать это индукцией по $k-n$. Действительно, если $n-k\leq 0$, то можно взять $r_k=0$.

Пусть теперь $k-n$ — произвольное целое число. Тогда рассмотрим свободный член r_n элемента $ry^{-n}\in U_0$. По условию $\lambda(R')=A$ и поэтому r_n лежит в $\lambda(R')$, поэтому в $R'\bigcap U_0$ найдётся элемент r' со свободным членом r_n. Тогда разность $ry^{-n}-r'$ лежит в U_1 и поэтому разность $r-r'y^n$ лежит в U_{n+1}. Тогда к разности $r-r'y^n$ применимо предположение индукции и существует такой элемент r'' из R', что $r-r'y^n-r''$ лежит в U_k. Поскольку элемент $r'y^n+r''$ лежит в R', доказательство завершено.

Остаётся доказать, что π — гомеоморфизм. Действительно, π — биекция, и при этом π и π^{-1} сохраняют фундаментальную систему окрестностей любой точки:

$$\pi^{-1}(r+U_n)=\pi^{-1}(r)+V_n \text{ и } \pi(g+V_n)=\pi(g)+U_n;$$

поэтому π — гомеоморфизм. □

Замечание. С учётом нормы и топологии, введённой в этом предложении, "обобщённая бесконечная сумма" в определении лорановского кольца, является просто суммой абсолютно сходящегося ряда. Полнота лорановского кольца как метрического пространства непосредственно связана с условием (iii) его определения. Так, в кольце многочленов Лорана $A[x,x^{-1}]$, не удовлетворяющем условию (iii), можно ввести норму и топологию аналогичным образом, но полученное пространство не будет полным. При этом кольцо $A[x, x^{-1}]$ как подкольцо в $A((x))$ удовлетворяет требуемым в предложении условиям и потому является всюду плотным подмножеством пространства $A((x))$.

4 Лорановские кольца: обозначения и общие свойства

Пусть R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов, а π — фиксированное отображение из $A((x))$ в R, как в определении 1. Тогда если $f = \sum f_i x^i$ — ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, будем для краткости называть элементы f_i из кольца A *левыми коэффициентами* элемента $\pi(f) \in R$. Поскольку отображение π — биекция $A((x))$ на R, у каждого элемента из R существует один и только один набор левых коэффициентов (при фиксированном отображении π). Непосредственно проверяется, что если элемент u лежит в U_0, то его свободный член совпадает с его левым коэффициентом u_0, вне зависимости от выбранного отображения π из $A((x))$ в R.

Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда для каждого подмножества B кольца A обозначим за $\mu(B)$ множество всех тех элементов кольца R, все левые коэффициенты которых лежат в B. Непосредственно проверяется, что если B — правый идеал кольца A, то $\mu(B)$ — правый идеал кольца R и что $\lambda(\mu(B)) = B$. Кроме того, если B — правый идеал, то правый идеал $\mu(B)$ замкнут относительно взятия "обобщённых бесконечных сумм" как в условии (iii). Отображение μ осуществляет вложение решётки правых идеалов кольца A в решётку правых идеалов кольца R (это вложение является гомоморфизмом относительно решёточных операций сложения и пересечения, в том числе и бесконечных сумм и пересечений). Легко видеть, что для любого главного правого идеала aA кольца коэффициентов выполнено равенство $\mu(aA) = \pi(a)R$.

Замечание. Отображение μ, в отличие от отображения λ, определено не симметрично относительно умножения справа или слева. Можно было бы определить его для правых коэффициентов и тогда оно осуществляло бы вложение решётки левых идеалов. Кроме того, наличие такого отображения существенно требует выполнения условия (iv) определения 2 и само отображение (поскольку оно использует понятие левых коэффициентов) зависит от выбора конкретного биективного отображения π из $A((x))$ в R.

Лемма 4.1. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда если B — максимальный правый идеал кольца A, то $\mu(B)$ — максимальный правый идеал кольца R.*

Доказательство. Действительно, пусть r — какой-то элемент кольца R, не лежащий в $\mu(B)$. Тогда достаточно доказать, что $rR + \mu(B) = R$.

Поскольку элемент r не лежит в $\mu(B)$, то какие-то из его левых коэффициентов не лежат в B, выберем из них коэффициент с наименьшим номером (такой, который стоит при самой младшей степени переменной в $A((x))$), пусть этот коэффициент будет r_n. Тогда, вычитая из элемента r элементы, лежащие в $\mu(B)$, можно добиться того, чтобы все левые коэффициенты r с номерами меньше n будут равны нулю. Поэтому будем считать, что r_n имеет наименьший номер среди ненулевых коэффициентов. Перейдя от элемента r к элементу $r\pi(x^{-n})$, можно добиться того, чтобы число n было равно нулю. Тогда элемент r лежит в U_0 и его свободный член r_0 не лежит в B.

Поскольку B — максимальный правый идеал кольца A, найдутся такие элементы a из A и b из B, что $r_0 a + b = 1$. Тогда у элемента $r\pi(a) + \pi(b)$ свободный член равен единице (а сам этот элемент лежит в $rR + \mu(B)$), следовательно, по предложению 3.4, он обратим в кольце R. Поэтому $rR + \mu(B) = R$, что и требовалось доказать. □

Предложение 4.2. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R лежит в $\mu(J(A))$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Действительно, поскольку радикал $J(A)$ совпадает с пересечением всех максимальных правых идеалов B кольца A, то правый идеал $\mu(J(A))$ совпадает с пересечением соответствующих им правых идеалов $\mu(B)$. По лемме 4.1 все правые идеалы $\mu(B)$ являются максимальными правыми идеалами кольца R, поэтому все они содержат радикал $J(R)$. Отсюда получаем, что $J(R)$ лежит в $\mu(J(A))$. □

Лемма 4.3. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть P — такой двусторонний идеал кольца A, что $\mu(P)$ — двусторонний идеал кольца R. Тогда на $R/\mu(P)$ можно естественно ввести структуру лорановского кольца, причём его кольцо коэффициентов будет изоморфно A/P.*

Доказательство. Действительно, проверим определение 1 лорановского кольца. Пусть $B = A/P$. Построим отображение χ из $B((x))$ в $R/\mu(P)$. Пусть b — ряд из $B((x))$, а $\{b_i\}$ — его коэффициенты, так что $b = \sum b_i x^i$. Пусть для каждого i выполнено равенство $b_i = a_i + P$, где $\{a_i\}$ — набор элементов из кольца A. Тогда обозначим за a ряд $\sum a_i x^i$ и положим $\chi(b) = \pi(a) + \mu(P)$. Непосредственно проверяется, что это определение не зависит от выбора a_i и что выполнены все свойства, требуемые в определении 1. □

5 Задание лорановских колец явными соотношениями

Для построения конкретных примеров лорановских колец нужно задать то или иное правило умножения рядов из $A((x))$ (поскольку правило сложения зафиксировано в определении). Однако явная вычислительная проверка аксиом кольца (особенно закона ассоциативности умножения) является чрезвычайно трудоемкой процедурой, которую, к тому же, приходится выполнять по отдельности для каждого отдельного примера. Поэтому будет целесообразно доказать несколько общих лемм, которые позволят упростить проверку аксиом кольца и построение умножения в кольце.

Лемма 5.1. *Пусть A — кольцо, а f — отображение, которое каждому одночлену вида ax^m (где a — элемент кольца A, а m — произвольное целое число) сопоставляет ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, причём для всех a и b из A и всех целых m выполнено равенство $f((a+b)x^m) = f(ax^m) + f(bx^m)$. Пусть существует такое целое n, что для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ больше или равна $n+m$. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^+((x))$, так, что ограничение f' на множество одночленов вида ax^m будет совпадать с f и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.*

При этом если для некоторого $c \in A$ для всех одночленов ax^n выполнялось условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или для некоторого целого j для всех одночленов ax^n выполнялось условие $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, то такое же условие будет выполнено и для отображения f'. Если же для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ равна $n+m$, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.

Доказательство. Поскольку для каждого фиксированного m отображение f задаёт гомоморфизм абелевой группы по сложению Ax^m, состоящей из всех одночленов вида ax^m в абелеву группу $A^+((x))$, то отображение f легко расширяется до гомоморфизма прямой суммы абелевых групп Ax^m в абелеву группу $A^+((x))$. Прямая сумма абелевых групп Ax^m по всем целым m совпадает с кольцом многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$, поэтому можно считать, что f — гомоморфизм абелевой группы $A^+[x, x^{-1}]$ в абелеву группу $A^+((x))$. Условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, если оно было выполнено, при этом, очевидно, сохраняется. Легко видеть, что если для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ равна $n+m$, то для всякого многочлена Лорана r с младшей степенью m младшая степень ряда $f(r)$ будет равна $n+m$.

Докажем существование такого продолжения f'. Пусть r — произвольный ряд, равный

$$\sum_{i=m}^{+\infty} f_i x^i.$$

Для каждого целого k обозначим многочлен Лорана

$$\sum_{i=m}^{k} f_i x^i,$$

за $r^{(k)}$. При $k < m$ будем считать, что $r^{(k)} = 0$.

Будем строить ряд $f'(r)$. Положим, что коэффициент ряда $f'(r)$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k. Легко видеть, что, все коэффициенты ряда $f'(r)$ при степенях переменной x младше $n+m$ равны нулю, поэтому ряд $f'(r)$ определён корректно и его младшая степень больше или равна $n+m$. Очевидно, что полученное отображение f' будет эндоморфизмом абелевой группы $A^+((x))$, поскольку $(r+s)^{(k)} = r^{(k)} + s^{(k)}$. Остаётся доказать, что для любого многочлена Лорана r выполнено равенство $f(r) = f'(r)$.

Действительно, коэффициент ряда $f'(r)$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k, следовательно нужно доказать, что для всякого целого k коэффициент ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r)$ при x^k. Для этого достаточно доказать включение $f(r) - f(r^{(k-n)}) \in V_{k+1}$, где за V_m, как и раньше, обозначается множество всех рядов с младшей степенью не ниже m. Но $f(r) - f(r^{(k-n)}) = f(r - r^{(k-n)})$, а многочлен $r - r^{(k-n)}$ является суммой одночленов со степенью выше $k-n$, поэтому ряд $f(r - r^{(k-n)})$ является суммой рядов со степенью выше k и, следовательно, лежит в V_{k+1}, что и требовалось доказать.

Нетрудно проверить по построению, что если было выполнено условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, то оно сохранится и для отображения f' и что если для всякого многочлена Лорана r с младшей степенью m младшая степень ряда $f(r)$ равна $n+m$, то для любого ряда r с младшей степенью m младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$.

Теперь докажем единственность такого продолжения f'. Действительно, если таких продолжений два, то их разность g также является эндоморфизмом абелевой группы $A^+((x))$, причём $g(A[x, x^{-1}]) = 0$ и для любого ряда r младшая степень ряда $g(r)$ больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r. Допустим, что существует такой ряд r, что $g(r)$ отлично от нуля. Пусть k — младшая степень ряда $g(r)$. Тогда ряд $g(r - r^{(k-n)}) = g(r) - g(r^{(k-n)}) = g(r)$ имеет младшую степень k. С другой стороны, поскольку младшая степень ряда $r - r^{(k-n)}$ не ниже $k-n+1$, то младшая степень ряда $g(r - r^{(k-n)})$ не ниже $k+1$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Замечание. С точки зрения топологии, введённой в предложении 3.5, лемма 5.1 является следствием того, что равномерно непрерывное отображение, определённое на всюду плотном подмножестве $A[x, x^{-1}]$, продолжается на всё полное метрическое пространство, причём единственным образом.

Иногда будет удобно пользоваться не непосредственно леммой 5.1, а её простым следствием:

Лемма 5.2. *Пусть A — кольцо, n — целое число, а $f : A^+ \longrightarrow V_n$ — гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу $a \in A$ сопоставляет ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$ младшая степень которого не ниже n. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^+((x))$, так, что ограничение f' на A будет совпадать с f, для всех рядов r и всех целых k будет выполнено равенство $f'(rx^k) = f'(r)x^k$ и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.*

Если же для всякого элемента a из A младшая степень ряда $f(a)$ равна n, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.

Доказательство. С учётом условия $f'(ax^m) = f'(a)x^m$ существует и единственно продолжение f' отображения f с абелевой группы A^+ на множество всех одночленов вида ax^m (где a — элемент кольца A, а m — произвольное целое число). К отображению f' можно применить лемму 5.1, что и завершает доказательство. □

Лемма 5.3. *Пусть A — кольцо, а $A((x))$ — кольцо рядов Лорана над ним. Пусть $\omega(\cdot, \cdot)$ — функция, которая каждой паре рядов из $A((x))$ сопоставляет ряд из $A((x))$. Пусть функция ω удовлетворяет следующим условиям (f, g и h в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A):*

(1) $\omega(f+g, h) \equiv \omega(f, h) + \omega(g, h)$ *и* $\omega(f, g+h) \equiv \omega(f, g) + \omega(f, h)$*;*

(2) *младшая степень ряда $\omega(f, g)$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x, f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1}, f)$ — ровно на единицу меньше;*

(3) $\omega(1, f) \equiv f$, $\omega(x, 1) = x$ *и* $\omega(x^{-1}, 1) = x^{-1}$*;*

(4) $\omega(af, gx^n) \equiv a\omega(f, g)x^n$*;*

(5) $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x, \omega(x^{n-1}, g))$ *при* $n > 0$ *и* $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{n+1}, g))$ *при* $n < 0$*;*

(6) $\omega(x, \omega(x^{-1}, a)) \equiv a$*;*

(7) $\omega(x^{-1}, ab) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b)$.

Тогда на абелевой группе $A^+((x))$ можно задать умножение $f \circ g = \omega(f,g)$ так, что будут выполнены все аксиомы кольца.

Доказательство. Всюду в доказательстве f, g и h в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A.

Доказательство будет основано на следующем приёме: если некоторое соотношение $\beta(f) \equiv \gamma(f)$ выполнено для всех одночленов f вида ax^n и при этом функции β и γ удовлетворяют условиям леммы 5.1, то это соотношение выполнено для всех рядов f из $A((x))$. Это вытекает из того, что по лемме 5.1 продолжение функции $\beta-\gamma$ на всё кольцо $A((x))$ единственно и тождественно равно нулю (непосредственно проверяется, что если функции β и γ удовлетворяют условиям леммы 5.1 для каких-то целых n_β и n_γ, то функция $\beta-\gamma$ удовлетворяет условиям леммы 5.1 для $\min(n_\beta, n_\gamma)$). Как правило, в качестве функций β и γ будет браться функция ω с одним зафиксированным аргументом или её композиция с самой собой, поэтому, в силу условий (1) и (2) будут выполнены условия леммы 5.1.

Основную трудность представляет доказательство ассоциативности умножения, задаваемого функцией ω. Выведем необходимые соотношения. Из условий (3) и (5) вытекает, что $\omega(x^n, 1) \equiv x^n$, откуда по условию (4) получаем $\omega(ax^n, 1) \equiv ax^n$ для всех a из A и, в силу леммы 5.1, $\omega(f, 1) \equiv f$ для всех f из $A((x))$, откуда по условию (4) $\omega(f, x^n) \equiv fx^n$ для всех целых n, в частности $\omega(x^n, x^m) \equiv x^{n+m}$. Из условий (3) и (4) вытекает $\omega(a, f) \equiv af$ для всех a и f.

Линейные эндоморфизмы β и β_{-1} абелевой группы $A^+((x))$, задаваемые соотношениями

$$\beta(f) = \omega(x, f) \text{ и } \beta_{-1}(f) = \omega(x^{-1}, f),$$

являются, по условию (2), инъективными. Из условий (6) и (4) получаем, что $\omega(x, \omega(x^{-1}, ax^n)) \equiv ax^n$, откуда, по лемме 5.1 получаем соотношение $\omega(x, \omega(x^{-1}, f)) \equiv f$. Таким образом $\beta\beta_{-1} = 1_{A^+((x))}$, поэтому эндоморфизм β сюръективен и, в силу своей инъективности, является автоморфизмом. Тогда β_{-1} совпадает с автоморфизмом β^{-1}. Из условий (3) и (5) тогда получаем, что $\beta^n(f) = \omega(x^n, f)$ для всех целых n. Отсюда для всех целых n и m получаем соотношения

$$\omega(x^n, \omega(x^m, f)) \equiv \omega(x^{n+m}, f) \equiv \omega(\omega(x^n, x^m), f).$$

Отсюда с помощью (4) получаем, что для всех целых n и m, всех a из A и всех рядов g выполнено соотношение

$$\omega(ax^n, \omega(x^m, g)) \equiv \omega(\omega(ax^n, x^m), g).$$

По лемме 5.1 отсюда получаем, что

$$\omega(f, \omega(x^m, g)) = \omega(\omega(f, x^m), g)$$

для всех рядов f и g и всех целых m.

Из условий (7), (4) и доказанного выше вытекают соотношения

$$\omega(x^{-1}, \omega(a, bx^n)) \equiv \omega(x^{-1}, abx^n) \equiv \omega(x^{-1}, ab)x^n \equiv$$

$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b)x^n \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), bx^n).$$

По лемме 5.1 получаем соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(a, f)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), f).$$

Подставляя в последнее соотношение $f = \omega(x^n, g)$ и пользуясь ранее выведенными соотношениями, получаем

$$\omega(x^{-1}, \omega(ax^n, g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(\omega(a, x^n), g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(a, \omega(x^n, g))) \equiv$$

$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), \omega(x^n, g)) \equiv \omega(\omega(\omega(x^{-1}, a), x^n), g)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, ax^n), g).$$

Отсюда с помощью леммы 5.1 получаем соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, f), g).$$

Будем по индукции доказывать соотношение $\omega(x^{-n}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-n}, f), g)$ для всех натуральных n. При $n = 1$ оно доказано, пусть оно доказано для некоторого $n = k$. Тогда по условию (5), пользуясь доказанным соотношением для $n = k$ и для $n = 1$, получаем

$$\omega(x^{-k-1}, \omega(f, g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{-k}, \omega(f, g))) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(\omega(x^{-k}, f), g)) \equiv$$

$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, \omega(x^{-k}, f)), g) \equiv \omega(\omega(x^{-k-1}, f), g),$$

что и доказывает индуктивный переход. Поэтому соотношение

$$\omega(x^{-n}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-n}, f), g)$$

доказано для всех натуральных n (для $n = 0$ оно очевидно вытекает из условия (3)).

Пусть теперь $n > 0$. Тогда, используя доказанное выше, получаем

$$\omega(\omega(x^n, f), g) \equiv \beta^n(\beta^{-n}(\omega(\omega(x^n, f), g))) \equiv \omega(x^n, \omega(x^{-n}, \omega(\omega(x^n, f), g))) \equiv$$

$$\equiv \omega(x^n, \omega(\omega(x^{-n}, \omega(x^n, f)), g)) \equiv \omega(x^n, \omega(\omega(x^{-n}, \omega(x^n, f)), g)) \equiv$$

$$\equiv \omega(x^n, \omega(\beta^{-n}(\beta^n(f)), g)) \equiv \omega(x^n, \omega(f, g)).$$

Таким образом соотношение $\omega(x^n,\omega(f,g))\equiv\omega(\omega(x^n,f),g)$ доказано для всех целых n. С учётом условия (4) доказано соотношение

$$\omega(ax^n,\omega(f,g))\equiv\omega(\omega(ax^n,f),g),$$

которое можно с помощью леммы 5.1 расширить на все ряды, получив таким образом соотношение $\omega(h,\omega(f,g))\equiv\omega(\omega(h,f),g)$. Таким образом ассоциативность доказана.

Дистрибутивность умножения, задаваемого функцией ω, прямо следует из условия (1), соотношение $\omega(f,1)\equiv f$ было доказано выше, а соотношение $\omega(1,f)\equiv f$ выполнено по условию (3). Таким образом абелева группа $A^+((x))$ с умножением ω действительно является кольцом. $\square$

Лемма 5.4. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Пусть $\Delta : A^+ \longrightarrow A^+[[x]]$ — произвольный гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу кольца A сопоставляет ряд без отрицательных степеней переменной с коэффициентами из A. Тогда существует и единственна функция $\omega(\cdot,\cdot)$, которая каждой паре рядов из $A((x))$ сопоставляет ряд из $A((x))$, удовлетворяющая условиям (f, g и h в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A):*

1. $\omega(f+g,h)\equiv\omega(f,h)+\omega(g,h)$ *и* $\omega(f,g+h)\equiv\omega(f,g)+\omega(f,h)$*;*
2. *младшая степень ряда $\omega(f,g)$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x,f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1},f)$ — ровно на единицу меньше;*
3. $\omega(1,f)\equiv f$*;*
4. $\omega(af,gx^n)\equiv a\omega(f,g)x^n$*;*
5. $\omega(x^n,g)\equiv\omega(x,\omega(x^{n-1},g))$ *при* $n>0$ *и* $\omega(x^n,g)\equiv\omega(x^{-1},\omega(x^{n+1},g))$ *при* $n<0$*;*
6. $\omega(x,\omega(x^{-1},a))\equiv a$*;*
7. $\omega(x^{-1},a)=\varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a)$.

Если обозначить за $\overline{\varphi}$ продолжение отображения φ до эндоморфизма $A^+((x))$, которое существует по лемме 5.2 и аналогично за $\overline{\varphi^{-1}}$ и $\overline{\Delta}$ такие же продолжения φ^{-1} и Δ, а за $\gamma(\cdot)$ обозначить эндоморфизм $-\overline{\Delta}(\overline{\varphi^{-1}}(\cdot))$, то для функции ω будет выполнено соотношение

$$\omega(x,a)\equiv\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(a))x^{i+1},$$

где знак $\sum$ обозначает введённую ранее “обобщённую бесконечную сумму” в кольце $A((x))$.

Доказательство. Всюду в доказательстве f и g в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A.

"Обобщённая бесконечная сумма" элементов $\overline{\varphi}(\gamma^i(a))x^{i+1}$ в условии определена корректно, поскольку младшая степень такого элемента равна $i+1$.

Допустим, что такая функция ω существует, тогда докажем по индукции, что при соблюдении этих условий для любого натурального n выполнено соотношение (для всех рядов f из $A((x))$):

$$\omega(x,f)=\omega(x,\gamma^n(f)x^n)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}. \tag{$*$}$$

Действительно, для $n=1$ из выполненного по условию (7) равенства $\omega(x^{-1},a)=\varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a)$ и условия (4) получаем $\omega(x^{-1},ax)=\varphi^{-1}(a)+\Delta(a)x$, откуда $\omega(x,\omega(x^{-1},ax))=\omega(x,\varphi^{-1}(a))+\omega(x,\Delta(a)x)$, и, применяя условие (6), получаем $ax=\omega(x,\varphi^{-1}(a))+\omega(x,\Delta(a)x)$, затем делая замену $b=\varphi^{-1}(a)$, получаем

$$\omega(x,b)=\varphi(b)x-\omega(x,\Delta(\varphi(b))x)=\varphi(b)x+\omega(x,\gamma(b)x).$$

Тогда по лемме 5.2 выполнено соотношение

$$\omega(x,f)\equiv\overline{\varphi}(f)x+\omega(x,\gamma(f)x), \tag{$**$}$$

что и требовалось для доказательства базы индукции.

Допустим теперь, что равенство (*) верно для некоторого n. Тогда, применяя (**) к равенству (*) для n, получаем

$$\omega(x,f)=\overline{\varphi}(\gamma^n(f)x^n)x+\omega(x,\gamma(\gamma^n(f)x^n)x)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}.$$

Отсюда с учётом того, что $\gamma(gx^m)\equiv\gamma(g)x^m$, и условия (4) получаем

$$\omega(x,f)=\omega(x,\gamma^{n+1}(f)x^{n+1})+\sum_{i=0}^{n}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1},$$

что завершает индуктивный переход.

Таким образом равенство (*) верно для всех натуральных n. Тогда получаем, что для всех натуральных n выполнено включение

$$\omega(x,f)-\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}\in U_{n+1},$$

что и означает по определению "обобщённой бесконечной суммы", что

$$\omega(x,f)=\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}.$$

Будем теперь строить функцию ω, постепенно расширяя область определения так, чтобы каждый шаг был единственно возможным. Для всех рядов g из $A((x))$ и всех элементов b из A положим, в соответствии с условиями,

$$\omega(1,g)\equiv g,$$
$$\omega(x^{-1},b)\equiv\varphi^{-1}(b)x^{-1}+\Delta(b),$$

положим также (как показано выше, единственно возможным образом)

$$\omega(x,b)\equiv\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(b))x^{i+1}.$$

С помощью леммы 5.2 расширим область определения функции ω по второму аргументу до всего кольца $A((x))$. Таким образом, функция $\omega(f,g)$ определена для всех рядов g из $A((x))$ и для рядов $f=x^{-1},1,x$. В соответствии с условием (5), для $n>1$ определим индуктивно

$$\omega(x^n,g)\equiv\omega(x,\omega(x^{n-1},g)),$$

а для $n<-1$ положим $\omega(x^n,g)\equiv\omega(x^{-1},\omega(x^{n+1},g))$. Зададим

$$\omega(ax^n,g)\equiv a\omega(x^n,g)$$

и по лемме 5.1 расширим область определения ω по первому аргументу до всего кольца $A((x))$. Легко проверить, что каждый шаг построения был единственно возможным, и что при построении соблюдались все требуемые свойства функции ω, кроме, возможно, (6).

Докажем, что выполнено условие (6). Действительно,

$$\omega(x,\omega(x^{-1},a))=\omega(x,\varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a))=\omega(x,\varphi^{-1}(a))x^{-1}+\omega(x,\Delta(a))=$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(\varphi^{-1}(a)))x^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(\Delta(a)))x^{i+1}\right)=a.$$

$\square$

Предложение 5.5. *Пусть A — кольцо и R — множество с бинарными операциями сложения и умножения. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A;*

(2) *существует автоморфизм φ кольца A, гомоморфизм абелевых групп $\Delta: A^+\longrightarrow A^+[[x]]$ и биективное отображение π из $A((x))$ на R такое, что сложение в R задаётся формулой $\pi(f)+\pi(g)=\pi(f+g)$, а умножение — формулой $\pi(f)\pi(g)=\pi(\omega(f,g))$, где ω — функция, построенная по лемме 5.4 на основе φ и Δ, при этом φ и Δ таковы, что для всех a и b из A выполнено соотношение $\Delta(ab)\equiv\omega(\Delta(a),b)+\varphi^{-1}(a)\Delta(b)$.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2). Действительно, возьмём биективное отображение π из $A((x))$ на R, как в определении 1 лорановского кольца. Тогда будет выполнено требуемое соотношение $\pi(f)+\pi(g) = \pi(f+g)$. Обозначим за $\beta(\cdot,\cdot)$ функцию, сопоставляющую двум рядам из $A((x))$ ряд в $A((x))$ по правилу $\beta(f,g) \equiv \pi^{-1}(\pi(f)\pi(g))$.

Пусть φ — скручивающий автоморфизм для элемента $\pi(x)$ (то есть автоморфизм факторкольца $A = U_0/U_1$, индуцированный автоморфизмом $r \longrightarrow \pi(x)r(\pi(x))^{-1}$ кольца U_0, сохраняющим U_1). Тогда φ^{-1} совпадает с автоморфизмом факторкольца U_0/U_1, индуцированным автоморфизмом $r \longrightarrow (\pi(x))^{-1}r\pi(x)$. Тогда для каждого элемента a из A свободный член элемента $(\pi(x))^{-1}\pi(a)\pi(x)$ совпадает с $\varphi^{-1}(a)$, поэтому

$$(\pi(x))^{-1}\pi(a)\pi(x) - \pi(\varphi^{-1}(a)) \in U_1,$$

откуда с учётом 2.1 получаем $\pi(x^{-1})\pi(a) - \pi(\varphi^{-1}(a)x^{-1}) \in U_0 = \pi(V_0)$, поэтому образ отображения $\Delta(a) \equiv \beta(x^{-1},a) - \varphi^{-1}(a)x^{-1}$ лежит в V_0. Очевидно, что Δ — гомоморфизм абелевых групп по сложению.

Непосредственно проверяется, что, в силу леммы 2.1, функция β удовлетворяет всем условиям леммы 5.4 для φ и Δ. Поэтому, в силу единственности, функция ω совпадает с функцией β.

Остаётся доказать соотношение

$$\Delta(ab) \equiv \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)\Delta(b).$$

Действительно, в силу ассоциативности умножения в кольце R, выполнено соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(ab)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$

Пользуясь свойствами отображения ω и соотношением

$$\omega(x^{-1}, a) \equiv \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a),$$

получаем

$$\varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \Delta(ab) = \omega(\Delta(a), b) + \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1}, b) =$$

$$= \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)(\Delta(b) + \varphi^{-1}(b)x^{-1}),$$

откуда и следует требуемое соотношение.

(2)$\Longrightarrow$(1). Чтобы применить к функции ω лемму 5.3, надо проверить равенства

$$\omega(x,1) = x,\ \omega(x^{-1},1) = x^{-1} \text{ и } \omega(x^{-1}, ab) \equiv \omega(\omega(x^{-1},a),b).$$

Первые два равенства непосредственно вытекают из условия $\omega(x^{-1}, a) = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)$. Остаётся доказать третье равенство.

Действительно, $\omega(x^{-1}, ab) = \varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \Delta(ab)$, с другой стороны

$$\omega(\omega(x^{-1}, a), b) = \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a), b) = \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1}, b) + \omega(\Delta(a), b) =$$
$$= \varphi^{-1}(a)\omega(x^{-1}, b) + \omega(\Delta(a), b) = \varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \varphi^{-1}(a)\Delta(b) + \Delta(a)b,$$

поэтому, по условию получаем, что

$$\omega(x^{-1}, ab) = \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$

Применим теперь к функции ω лемму 5.3, получим, что абелева группа $A^+((x))$ с умножением, заданным функцией ω, является кольцом. Тогда кольцом является и само множество R с операциями сложения и умножения. Условия определения 1 лорановского кольца непосредственно вытекают из соответствующих свойств функции ω. □

6 Примеры лорановских колец

Предложение 5.5, хотя и даёт формально полное описание лорановских колец, не позволяет строить их в общем случае достаточно эффективно, поскольку проверка требуемого соотношения на φ и Δ в общем виде не существенно проще, чем непосредственная проверка аксиом кольца. Тем не менее, частный случай, когда образ гомоморфизма абелевых групп Δ содержится не только в $A[[x]]$, но и в A, позволяет построить несколько важных примеров. В этом случае (после переобозначения $\delta = \Delta$) условие, накладываемое в предложении 5.5 на φ и δ, упрощается до равенства

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b).$$

Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, а δ — φ^{-1}-*дифференцирование* (то есть эндоморфизм абелевой группы по сложению A^+, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b)$ для всех a и b из A). Тогда по предложению 5.5 с помощью φ и δ строится лорановское кольцо, которое будет называться *кольцом косых рядов Лорана с косым дифференцированием*. Тождественно нулевой эндоморфизм δ всегда является φ^{-1}-дифференцированием, в этом случае получаем кольцо косых рядов Лорана. В случае $\varphi = 1_A$ φ^{-1}-дифференцирование становится обычным дифференцированием и кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием в этом случае изоморфно кольцу псевдодифференциальных операторов.

В качестве примера нетривиального φ^{-1}-дифференцирования при нетождественном автоморфизме φ можно взять функцию $\delta(a) = c(a - \varphi^{-1}(a))$, где c — какой-либо фиксированный центральный элемент кольца A. Полученный пример кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием показывает, что класс лорановских колец состоит не только из колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

Предложение 6.1. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда всем условиям определения 1 лорановского кольца удовлетворяет кольцо рядов Лорана $R = A((x,\varphi))$ с естественным изоморфизмом абелевых групп $A((x,\varphi))$ и $A((x))$, который переводит формальную сумму $a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots$ в одном кольце в точно такую же формальную сумму в другом кольце. При этом, если $a_n, a_{n+1}, \dots$ — произвольная последовательность элементов кольца A, то "обобщённая бесконечная сумма" одночленов $a_i x^i$ по $i \geq n$ всегда определена и совпадает с формальным рядом $a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots$.*

Предложение 6.1 проверяется непосредственно.

Предложение 6.2. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда существует и единственно с точностью до изоморфизма кольцо $A((t^{-1},\delta))$, состоящее из формальных сумм*

$$f = \sum_{i=-\infty}^{m} f_i t^i,$$

где t — независимая переменная, m — целое (возможно, отрицательное) число, а коэффициенты f_i ряда f — элементы кольца A, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является лорановским кольцом, если в качестве отображения π из $A((x))$ в $A((t^{-1},\delta))$ в первом определении лорановского кольца взять отображение, переводящее формальную сумму*

$$\sum_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$$

в формальную сумму

$$\sum_{i=-\infty}^{-m} f_{-i} t^i;$$

(2) *в кольце $A((t^{-1},\delta))$ для каждого элемента a из кольца A выполнено равенство $ta = at + \delta(a)$.*

При этом, если $a_n, a_{n+1}, \dots$ — произвольная последовательность элементов кольца A, то "обобщённая бесконечная сумма" одночленов $a_i x^i$ по $i \geq n$ всегда определена и совпадает с формальным рядом $a_n t^{-n} + a_{n+1} t^{-n-1} + \dots$. Кроме того, в кольце $A((t^{-1},\delta))$ для каждого элемента a из кольца A будет выполнено равенство

$$t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1}.$$

Доказательство. Заключение предложения вытекает из предложения 5.5 и леммы 2.3. $\square$

Выбранный метод построения кольца псевдодифференциальных операторов позволил не задавать произведение двух рядов явной формулой для коэффициентов, а доказать существование такого произведения итеративной процедурой. Тем не менее, выпишем явную формулу, хотя проверка с её помощью каких-либо свойств произведения является трудоёмкой вычислительной процедурой.

Для выписывания формулы умножения потребуется дополнительное обозначение. Обычно биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ определяются только для неотрицательных целых n и неотрицательных целых $k \leq n$ с помощью формулы

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

где предполагается, что $0! = 1$. Распространим это же определение на все целые значения n и все неотрицательные целые значения k. При этом, если $k > n \geq 0$, то $\binom{n}{k} = 0$. Для того, чтобы доказать, что для отрицательных n число $\binom{n}{k}$ является целым, отметим, что

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(n)(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Лемма 6.3. *Пусть A — кольцо, δ — дифференцирование в нём, и $A((t^{-1}, \delta))$ — кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любого целого n и для любого элемента a из A в кольце $A((t^{-1}, \delta))$ выполнено равенство*

$$t^n a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i}.$$

Доказательство. В рамках этого доказательства для обозначения "обобщённой бесконечной суммы" из условия (iii) определения лорановского кольца будет использоваться обычный знак суммирования $\sum$. При этом используется то, что формальная сумма в записи элементов кольца псевдодифференциальных операторов является частным случаем "обобщённой бесконечной суммы".

Заметим, что для неотрицательных n в равенстве

$$t^n a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i}$$

бесконечная сумма является фактически конечной, поскольку для всех $i > n$ биномиальный коэффициент $\binom{n}{i}$ равен нулю.

Докажем требуемое соотношение по индукции для неотрицательных n. Для $n = 0$ соотношение тривиально, для $n = 1$ оно совпадает с соотношением $ta = at + \delta(a)$, которое входит в определение кольца псевдодифференциальных операторов. Пусть теперь оно доказано для некоторого n, докажем его тогда для $n + 1$.

Действительно, имеем:

$$t^{n+1}a = t(t^n a) = t\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\delta^i(a)t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\delta^i(a)t + \delta^{i+1}(a))t^{n-i} =$$

$$= at^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1}\left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right)\delta^i(a)t^{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\delta^i(a)t^{n+1-i}.$$

Остаётся доказать требуемое соотношение для отрицательных n. Для $n = -1$ оно совпадает с соотношением

$$t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\delta^i(a)t^{-i-1},$$

которое выполнено в силу предложения 6.2. Пусть оно доказано для некоторого $-n$, где n — натуральное число. С учётом леммы 3.1 получаем

$$t^{-n-1}a = t^{-1}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{-n}{i}\delta^i(a)t^{-n-i}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}t^{-1}\binom{-n}{i}\delta^i(a)t^{-n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\binom{-n}{i}\delta^{i+j}(a)t^{-j-1}\right)t^{-n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\binom{-n}{i}\delta^{i+j}(a)t^{-n-i-j-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{-n}{i-j}\delta^i(a)t^{-n-i-1}.$$

Учитывая равенство $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$ и делая замену $j = i - j$ получаем, что

$$t^{-n-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{n+j-1}{j}\right)\delta^i(a)t^{-n-i-1}.$$

С учётом чисто арифметического равенства

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{n+j-1}{j} = \binom{n+i}{i},$$

которое легко доказывается индукцией по i, получаем равенство

$$t^{-n-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i \binom{n+i}{i}\delta^i(a)t^{-n-i-1} = \sum_{i=0}^{+\infty}\binom{-n-1}{i}\delta^i(a)t^{-n-i-1},$$

что и требовалось доказать. □

Теперь, наконец, можно выписать явную формулу для умножения двух рядов.

Предложение 6.4. *Пусть A — кольцо, δ — дифференцирование в нём, и $A((t^{-1},\delta))$ — кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любых двух элементов*

$$f = \sum_{i=-\infty}^{n} f_i t^i \in A((t^{-1},\delta))$$

и

$$g = \sum_{i=-\infty}^{m} g_i t^i \in A((t^{-1},\delta))$$

выполнено равенство

$$fg = \sum_{k=-\infty}^{n+m}\left(\sum_{i=k-m}^{n}\sum_{j=k-i}^{m}\binom{i}{i+j-k} f_i\delta^{i+j-k}(g_j)\right)t^k.$$

Доказательство. В рамках этого доказательства для обозначения “обобщённой бесконечной суммы” из условия (iii) определения лорановского кольца будет использоваться обычный знак суммирования $\sum$. При этом используется то, что формальная сумма в записи элементов кольца псевдодифференциальных операторов является частным случаем “обобщённой бесконечной суммы”.

Действительно, применяя лемму 3.1 и формулу, доказанную в лемме 6.3, получаем

$$fg = \left(\sum_{i=-\infty}^{n} f_i t^i\right)\left(\sum_{i=-\infty}^{m} g_i t^i\right) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m} f_i t^i g_j t^j =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m} f_i\left(\sum_{k=-\infty}^{i}\binom{i}{i-k}\delta^{i-k}(g_j)t^k\right)t^j =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m}\sum_{k=-\infty}^{i}\binom{i}{i-k} f_i\delta^{i-k}(g_j)t^{k+j} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{n} \sum_{j=-\infty}^{m} \sum_{k=-\infty}^{i+j} \binom{i}{i+j-k} f_i \delta^{i+j-k}(g_j) t^k.$$

Положив временно, что для отрицательных k биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ равен нулю, можно расширить в последнем выражении верхний предел суммирования по k до $n+m$ (сделав его, таким образом, не зависящим от i и j) и тогда, по лемме 3.1 можно поменять порядок суммирования. Получаем

$$fg = \sum_{k=-\infty}^{n+m} \sum_{i=-\infty}^{n} \sum_{j=-\infty}^{m} \binom{i}{i+j-k} f_i \delta^{i+j-k}(g_j) t^k.$$

Теперь учтём, что при $i+j-k<0$ коэффициент $\binom{i}{i+j-k}$ равен нулю, что позволяет изменить нижние пределы суммирования по i и j. Получаем

$$fg = \sum_{k=-\infty}^{n+m} \sum_{i=k-m}^{n} \sum_{j=-k-i}^{m} \binom{i}{i+j-k} f_i \delta^{i+j-k}(g_j) t^k,$$

что и требовалось доказать. □

Приведём также пример обобщённого лорановского кольца, не являющегося лорановским кольцом.

Пусть n — произвольное целое число, большее единицы. По аналогии с кольцом целых p-адических чисел назовём *кольцом целых n-адических чисел* кольцо всех последовательностей элементов $a_1 \in Z/nZ, a_2 \in Z/n^2Z, \ldots$ таких, что $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{n^{k-1}}$ с почленным сложением и умножением. Непосредственно проверяется, что это определение корректно и что кольцо целых чисел Z естественным образом лежит в кольце Z_n (целому числу a можно сопоставить последовательность остатков от деления a на n^k). *Кольцом дробных n-адических чисел Q_n* назовём кольцо частных кольца целых n-адических чисел по мультипликативно замкнутому множеству $n, n^2, n^3, \ldots$. Кольцо целых p-адических чисел является частным случаем кольца целых n-адических чисел (при простом $n=p$), а поле p-адических чисел является частным случаем кольца дробных n-адических чисел.

Предложение 6.5. *Для любого целого n, большего единицы, кольцо дробных n-адических чисел Z_n удовлетворяет условиям* (i), (ii), (iii) *второго определения лорановского кольца, если положить $U_k = n^k Z_n$, где Z_n — кольцо целых n-адических чисел, вложенное в Q_n.*

При этом кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу вычетов Z/nZ и не вкладывается в кольцо Q_n как унитарное подкольцо.

Кольцо Q_n является полем тогда и только тогда, когда $n=p^m$, где p — простое, а m — натуральное число, а для других n оно не является не только полем, но и областью.

Доказательство. Докажем, что пересечение U_k по всем целым k состоит из одного нуля, остальная часть условия (i) проверяется тривиально. Достаточно заметить, что для положительных k множество $U_k \subset U_0 = Z_n$ содержит только целые n-адические числа и состоит из тех и только тех последовательностей $\{a_i\}$ (удовлетворяющих условию n-адического числа), у которых первые k членов равны нулю. Отсюда сразу вытекает, что пересечение U_k по положительным k состоит из одного нуля.

Условие (ii) также выполнено — достаточно взять в качестве взаимно обратных элементов $n \in U_1$ и $n^{-1} \in U_{-1}$.

Пусть теперь $u_k \in U_k, u_{k+1} \in U_{k+1}, \ldots$ — последовательность элементов как в условии (iii). Можно откинуть любое конечное количество начальных членов этой последовательности, определить "обобщённую бесконечную сумму" оставшихся элементов, а затем добавить к этой сумме прежде откинутые члены. Поэтому можно считать, что k — неотрицательное целое число, а добавив в сумму конечное число нулевых слагаемых в начале, можно сделать так, чтобы k равнялось нулю. Определим теперь "обобщённую бесконечную сумму" v как последовательность $v_i \in Z/n^i Z$, где v_i равно $\sum\limits_{j=0}^{i-1} u_j i$, где $u_j i \in Z/n^i Z$ — соответствующий член последовательности, определяющей элемент u_j кольца целых n-адических чисел. Непосредственно проверяется, что v — и есть искомая сумма.

Из того, что U_1 содержит те и только те последовательности, у которых первый член — нулевой, очевидно следует, что кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу вычетов Z/nZ. Кольцо Q_n по сложению является абелевой группой без кручения (поскольку содержит поле рациональных чисел), следовательно, кольцо U_0/U_1 не может быть в него вложено.

Докажем теперь, что кольцо целых (дробных) n^m-адических чисел изоморфно кольцу целых (дробных) n-адических чисел для любого натурального m, тогда будет доказано, что для простого p кольцо дробных p^m-адических чисел является полем (хорошо известно, что кольцо дробных p-адических чисел является полем). Действительно, последовательности $a_1 \in Z/nZ, a_2 \in Z/n^2 Z, \ldots$, определяющей элемент a кольца Z_n, можно сопоставить её подпоследовательность $a_m \in Z/n^m Z, a_{2m} \in Z/n^2 mZ, \ldots$, определяющую элемент из кольца Z_{n^m}. И наоборот, каждой последовательности $a_m \in Z/n^m Z, a_{2m} \in Z/n^2 mZ, \ldots$ можно сопоставить последовательность $a_1 \in Z/nZ, a_2 \in Z/n^2 Z, \ldots$, определив недостающие члены из условия $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{n^{k-1}}$. Непосредственно проверяется, что эти сопоставления определяют изоморфизм колец.

Пусть теперь n — натуральное число, большее единицы и не являющееся степенью простого числа. Тогда можно представить число n в виде ab, где a и b — взаимно простые натуральные числа, отличные от единицы. Определим целое n-адическое число v последовательностью v_i такой, что $v_1 = a$ и v_i делится на a^i в кольце $Z/n^i Z$. Такую последовательность можно построить индуктивно. Действительно, пусть $v_i \equiv a^i q_i \pmod{n^i}$ для некоторого целого q_i. Поскольку целые числа a и b^i взаимно просты, то a обратимо в кольце вычетов по модулю b^i и можно найти q_{i+1} такое, что $aq_{i+1} \equiv q_i \pmod{b^i}$. Тогда $a^{i+1}q_{i+1} \equiv a^i q_i \pmod{a^i b^i}$, что и требовалось.

Аналогично можно определить целое n-адическое число w так, чтобы $w_1 = b$ и w_i делилось на b^i в кольце Z/n^iZ. Элементы w и v отличны от нуля (поскольку w_1 и v_1 отличны от нуля), при этом $wv = 0$, поскольку для каждого натурального i элемент $w_i v_i$ делится на $a^i b^i = n^i$ в кольце Z/n^iZ, а следовательно равен нулю. Поэтому кольцо Q_n не является областью и, как следствие, не является телом. $\square$

Глава 2. Кольцевые свойства колец рядов Лорана и их обобщений

7 Тела

Из предложений 6.1 и 6.2 вытекает, что все результаты, полученные для лорановских колец, переносятся на кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов. Будем (в соответствии с обозначениями предыдущей главы) полагать, что в кольцах косых рядов Лорана U_n обозначает множество всех рядов, в которые переменная входит в степени не ниже n, а в кольцах псевдодифференциальных операторов — множество всех рядов, в которые переменная входит в степени не выше $-n$. Соответственно переносятся и другие обозначения (понятие свободного члена, отображение λ и отображение μ).

С учётом условия (iv) определения лорановского кольца из предложения 3.4 можно получить предложение, частные случаи которого для кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов хорошо известны:

Предложение 7.1. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо, и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R является телом тогда и только тогда, когда кольцо A является телом.*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A является телом.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A является телом.*

Доказательство. С учётом предложений 6.1 и 6.2 утверждения (2) и (3) являются частными случаями утверждения (1).

(1) В одну сторону утверждение доказано в предложении 3.4. Пусть теперь R — тело. Тогда кольцо A является областью, поскольку вкладывается в тело R. Пусть a — произвольный ненулевой элемент кольца A. Элемент $\pi(a)$ обратим в теле R, пусть r — его обратный. Согласно определению 1 лорановского кольца, элементу r соответствует какой-то ряд f из $A((x))$, так что $r = \pi(f)$. Из определения 1 легко вытекает, что $\pi(a)r = \pi(af)$. Пусть $f_n x^n$ — младший член ряда f. A — область, поэтому элемент $af_n x^n$ отличен от нуля. Тогда $1 = \pi(a)r = \pi(a)\pi(f) = \pi(af) = \pi(af_n x^n + v_{n+1})$, где v_{n+1} лежит в V_{n+1}. Отсюда получаем, что $1 - \pi(af_n x^n) \in U_{n+1}$, что возможно только в случае $n = 0$ и $1 = \pi(af_0)$, поскольку элемент $af_n x^n$ отличен от нуля. Но тогда элемент a обратим справа, что и требовалось доказать. $\square$

8 Нётеровы и артиновы кольца

Предложение 8.1. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо, и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда кольцо A нётерово справа.*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ нётерово справа тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A нётерово справа.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ нётерово справа тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A нётерово справа.*

Доказательство. С учётом предложений 6.1 и 6.2 утверждения (3) и (2) являются частными случаями утверждения (1).

(1) Если кольцо R нётерово справа, то, поскольку решетка правых идеалов кольца A инъективно вкладывается в решетку правых идеалов кольца R (с помощью отображения μ), то и кольцо A нётерово справа.

Пусть теперь A — нётерово справа кольцо. Допустим, что кольцо R не нётерово справа, тогда в нем существует бесконечная строго возрастающая цепочка правых идеалов $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Рассмотрим возрастающую цепочку правых идеалов $\lambda(B_1), \lambda(B_2), \ldots$ в кольце A. По условию кольцо A нётерово справа, поэтому существует такое натуральное число k, что $\lambda(B_n) = \lambda(B_k)$ для всех $n > k$. Но кольцо A нётерово справа, поэтому все правые идеалы $\lambda(B_n)$ конечно порождены. Тогда идеал $\lambda(B_k)$ порождается конечным числом элементов кольца A, которые являются свободными членами каких-то элементов $\{c_i\}$ из множества $U_0 \bigcap B_k$. Тогда для любого

$n > k$ к правым идеалам B_n и B_k и к набору элементов $\{c_i\}$ применима лемма 3.3, откуда вытекает, что все правые идеалы B_n совпадают при $n > k$, что противоречит предположению. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Предложение 8.2. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо, и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R артиново справа тогда и только тогда, когда кольцо A артиново справа.*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ артиново справа тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A артиново справа.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ артиново справа тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A артиново справа.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 8.1 □

Замечание. Можно отметить, что доказательство предложений 8.1 и 8.2 использует условие (iv) определения лорановского кольца только для доказательства в одну сторону. Таким образом если кольцо коэффициентов A нётерово или артиново, то кольцо R нётерово или артиново, даже если R — обобщённое лорановское кольцо.

9 Области, кольца главных идеалов и кольца Безу

Предложение 9.1. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо, и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R является областью тогда и только тогда, когда кольцо A является областью.*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ является областью тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A является областью.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является областью тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов A является областью.*

Доказательство. С учётом предложений 6.1 и 6.2 утверждения (3) и (2) являются частными случаями утверждения (1)

(1) Пусть R область. Тогда A тоже является областью, поскольку изоморфно подкольцу области R.

Пусть теперь A область. Пусть r_1 и r_2 — произвольные ненулевые элементы кольца R. Тогда представим их в виде $r_1 = w_1 v_1$ и $r_2 = v_2 w_2$, где v_1 и v_2 — элементы из U_0 с ненулевыми свободными членами, а w_1 и w_2 — обратимые элементы кольца R. Тогда $r_1 r_2 = w_1(v_1 v_2)w_2$, при этом элемент $v_1 v_2$ отличен от нуля, поскольку его свободный член, равный произведению двух ненулевых элементов области A, отличен от нуля. Но тогда и элемент $r_1 r_2$ отличен от нуля, что и требовалось доказать. □

Замечание. Для обобщённых лорановских колец утверждение предложения 9.1 остаётся в силе только в одну сторону. В предложении 6.5 построен пример обобщённого лорановского кольца Q_{p^n}, которое является телом, а его кольцо коэффициентов (при n больших единицы) не является областью.

Кольцо A называется *кольцом главных правых идеалов*, если каждый его правый идеал является главным правым идеалом. Кольцо A называется *правым кольцом Безу*, если каждый его конечнопорождённый правый идеал является главным.

Предложение 9.2. *Пусть A — кольцо главных правых идеалов. Тогда:*

(1) *если R — обобщённое лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, то R — кольцо главных правых идеалов;*
(2) *если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ — кольцо главных правых идеалов;*
(3) *если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ — кольцо главных правых идеалов.*

Доказательство. С учётом предложений 6.1 и 6.2 утверждения (2) и (3) являются частными случаями утверждения (1)

(1) Действительно, пусть P — правый идеал кольца R. Тогда $\lambda(P)$ — правый идеал кольца A и по условию порождается каким-то элементом a из A. Тогда, поскольку a лежит в $\lambda(P)$, найдётся элемент r из $P \bigcap U_0$ такой, что свободный член r равен a. Тогда к правому идеалу P и к элементу r применима лемма 3.3, из которой следует, что $rR = P$, что и требовалось доказать. □

Теорема 9.3. *Пусть R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(1) *R — область главных правых идеалов;*
(2) *R — кольцо главных правых идеалов и A — область;*
(3) *A — область главных правых идеалов.*

Доказательство. Условия (1) и (2) равносильны в силу предложения 9.1. Из условия (3) вытекает условие (2) в силу предложения 9.2. Остаётся доказать, что из условия (2) вытекает условие (3).

Действительно, пусть B — произвольный ненулевой правый идеал кольца A. Тогда правый идеал $\mu(B)$ кольца R является главным и порождается каким-то элементом f. Поскольку элемент f (как и всякий ненулевой элемент кольца R) можно представить в виде uv, где u лежит в U_0 и имеет ненулевой свободный член, а v — обратим, то без ограничения общности можно считать, что f лежит в U_0 и имеет ненулевой свободный член. Пусть a — свободный член f, очевидно, a лежит в B. Для всякого элемента b из B выполнено включение $\pi(b) \in \mu(B)$, поэтому для какого-то элемента g из R выполнено равенство $fg = \pi(b)$. Поскольку A — область, в силу леммы 3.2, получаем, что младшая степень элемента g равна нулю (так как младшие степени f и $\pi(b)$ равны нулю).

Тогда, поскольку свободный член произведения равен произведению свободных членов, получаем, что $ag_0 = b$, где g_0 — свободный член g. Тогда b лежит в aA, и тогда $B = aA$ — главный правый идеал, что и требовалось доказать. $\square$

Из теоремы 9.3 с помощью предложений 6.1 и 6.2 получаем две теоремы:

Теорема 9.4. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда эквивалентны следующие условия:*
(1) $A((x, \varphi))$ *— область главных правых идеалов;*
(2) $A((x, \varphi))$ *— кольцо главных правых идеалов и A — область;*
(3) A *— область главных правых идеалов.*

Теорема 9.5. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда эквивалентны следующие условия:*
(1) $A((t^{-1}, \delta))$ *— область главных правых идеалов;*
(2) $A((t^{-1}, \delta))$ *— кольцо главных правых идеалов и A — область;*
(3) A *— область главных правых идеалов.*

Замечание. Из теоремы 9.4 вытекает, что кольцо рядов Лорана $Z((x))$ над кольцом целых чисел Z является кольцом главных идеалов. В связи с этим заметим, что кольцо многочленов $Z[x]$ и кольцо формальных степенных рядов $Z[[x]]$ не являются кольцами главных идеалов, поскольку идеал, порождённый 2 и x не является главным. Это показывает, что случай колец рядов Лорана отличается от случаев колец многочленов и колец формальных степенных рядов.

Сумма подмодулей (или идеалов) называется *сократимой*, если в ней есть такое слагаемое, при удалении которого из суммы сумма не меняется. Сумма подмодулей (или идеалов) называется *несократимой*, если при удалении любого из её слагаемых сумма меняется.

Лемма 9.6. *Пусть M_A — правый модуль над кольцом A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любая бесконечная сумма подмодулей $\{M_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ модуля M_A сократима.*

(2) *все фактормодули модуля M_A конечномерны — то есть не содержат бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2). Действительно, пусть N_A — фактормодуль модуля M_A и в нём существует бесконечная прямая сумма ненулевых подмодулей N_α. Тогда рассмотрим их прообразы M_α при каноническом гомоморфизме M_A на N_A. По условию, сумма подмодулей M_α должна быть сократима, то есть для некоторого β модуль M_β лежит в сумме $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Но тогда и модуль N_β лежит в сумме $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} N_\alpha$, что противоречит предположению.

(2)$\Longrightarrow$(1). Пусть $\{M_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ — произвольное множество подмодулей модуля M. Рассмотрим подмодуль P_A модуля M, равный сумме

$$\sum_{\beta\in\Omega}(M_\beta \bigcap \sum_{\alpha\neq\beta} M_\alpha).$$

Пусть $p = \sum\limits_{\beta\in\Omega} m_\beta$ (лишь конечное число членов суммы отлично от нуля) — какой-то элемент подмодуля P, причём $m_\beta \in M_\beta \bigcap \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ для всех β из Ω. Тогда для каждого $\beta \in \Omega$ элемент m_β лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, и элемент $p - m_\beta = \sum\limits_{\alpha\neq\beta} m_\alpha$ лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому элемент p также лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Таким образом для каждого $\beta \in \Omega$ выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$.

Обозначим за N_A фактормодуль M/P, а за N_α — образ подмодуля M_α при каноническом гомоморфизме M на N. Докажем, что модули N_α образуют прямую сумму, для этого нужно доказать, что для каждого $\beta \in \Omega$ пересечение модуля N_β с модулем $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} N_\alpha$ равно нулю или, что то же самое, доказать, что пересечение модуля $M_\beta + P$ с модулем $P + \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ лежит в P. Как доказано выше, выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому надо доказать только, что пересечение модуля M_β с модулем $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ лежит в P. Но это верно по определению модуля P.

Таким образом модули N_α образуют бесконечную прямую сумму в фактормодуле $N = M/P$ и по условию не могут быть все ненулевыми. Поэтому для некоторого $\beta \in \Omega$ модуль N_β равен нулю и, следовательно, $M_\beta \subseteq P$. Как было доказано выше, выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому

$M_\beta \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Но это и означает, что сумма $\sum\limits_{\beta\in\Omega} M_\beta$ сократима. Доказательство завершено. $\square$

Модуль называется *дистрибутивным*, если для любых его подмодулей A, B, C выполнено равенство $(A+B)\cap C = A\cap C + B\cap C$. Кольцо называется *дистрибутивным справа (слева)*, если оно является дистрибутивным правым (левым) модулем над собой.

В дальнейшем для проверки дистрибутивности модуля будет использоваться приведённый ниже известный критерий (см., например, [51] или [54, Proposition 1.17]).

Лемма 9.7. *Правый модуль M_A над кольцом A является дистрибутивным тогда и только тогда, когда для любых двух его элементов m, n существует такой элемент a кольца A, что $ma\in nA$ и $n(1-a)\in mA$.*

Предложение 9.8. *Пусть B — кольцо, содержащее бесконечную последовательность ненулевых центральных попарно ортогональных идемпотентов $e(i)$ таких, что все кольца $A(i) = e(i)B$ являются областями. Предположим также, что B содержит такой элемент b, что $e(i)b$ — необратимый ненулевой элемент области $A(i)$ для каждого i. Пусть φ — такой автоморфизм кольца B, что $\varphi(e(i)) = e(i)$ для всех i.*

Тогда $B((x,\varphi))$ не является правым кольцом Безу и не является дистрибутивным справа кольцом.

Доказательство. Пусть $R = B((x,\varphi))$ и C — прямая сумма областей $A(i)$. Непосредственно проверяется, что C — идеал кольца B. Обозначим через D идеал кольца B, состоящий из всех таких элементов d, что лишь конечное число проекций $de(i)$ (i меняется от 0 до ∞) отлично от нуля. Очевидно, что $C\subseteq D$. Заметим, что элемент b не лежит в идеале D, поскольку $be(i)$ — ненулевой элемент для всех i. Будем отождествлять кольцо $R(i) = e(i)R$ с кольцом косых рядов Лорана над $A(i)$ (поскольку $\varphi(e(i)) = e(i)$, то ограничение автоморфизма φ на кольцо $A(i)$ является автоморфизмом кольца $A(i)$). Для каждого элемента a кольца B обозначим через $a(i)$ его проекцию $ae(i)$ на кольцо $A(i)$.

Рассмотрим элементы $f = e(1)x + e(2)x^2 + \ldots$ и $b = bx^0$ кольца рядов R. Допустим, что R — правое кольцо Безу. Тогда существует ряд g такой, что $fR + bR = gR$. Из этого равенства вытекает, что все коэффициенты ряда g лежат в правом идеале $C + bB$ кольца B, порождённом коэффициентами рядов f и b. С другой стороны, элемент b также должен лежать в правом идеале кольца B, порождённом коэффициентами ряда g. Поэтому все коэффициенты ряда g не могут лежать в идеале D.

Выберем среди коэффициентов ряда g, не лежащих в D, самый младший. Пусть это g_i. Все коэффициенты ряда g, которые младше g_i, лежат в идеале D. Более того, поскольку их конечное число, то найдется такое натуральное число k, что проекции этих коэффициентов на $A(n)$ равны нулю для всех n, превосходящих k. Поскольку коэффициент g_i лежит в правом идеале $C + bB$ и не лежит в идеале D, то найдется такое число $n > k$, что элемент $g_i(n)$ лежит в правом идеале $bA(n)$ и не равен нулю. Тогда рассмотрим проекцию равенства $gR = fR + bR$ на кольцо $R(n) = e(n)R$. Получаем равенства

$$e(n)gR = g(n)R(n) = f(n)R(n) + b(n)R(n) =$$

$$= e(n)x^n R(n) + b(n)R(n) = R(n) + b(n)R(n) = R(n).$$

Таким образом, ряд $g(n) = e(n)g$ обратим в кольце $R(n)$. Младшим коэффициентом ряда $g(n)$ является элемент $g_i(n) \in A(n)$, поскольку все коэффициенты при более низких степенях равны нулю (в силу того, что $n > k$). Кроме того, элемент $g_i(n)$ лежит в собственном правом идеале $bA(n) = e(i)bA(n)$ кольца $A(n)$ и, следовательно, не обратим в кольце $A(n)$. Тогда, в силу того, что младший член произведения равен произведению младших членов (поскольку $A(n)$ — область), ряд $g(n)$ не обратим в кольце $R(n)$. Получено противоречие; таким образом $B((x, \varphi))$ не является правым кольцом Безу.

Предположим теперь, что кольцо R дистрибутивно справа. Согласно сформулированному ранее критерию дистрибутивности (лемма 9.7) для элементов b и f дистрибутивного справа кольца R существует такой элемент g кольца R, что $bg \in fR$ и $f(1-g) \in bR$. Непосредственно проверяется, что все коэффициенты всех рядов из fR лежат в правом идеале C, который порожден всеми коэффициентами ряда f. Тогда все коэффициенты ряда bg лежат в C. В частности, для каждого i лишь конечное число проекций $e(n)bg_i = b(n)g_i(n)$ отлично от нуля. Поскольку все кольца $A(n)$ являются областями и проекции $b(n)$ отличны от нуля для всех n, то для каждого i лишь конечное число проекций $g_i(n)$ отлично от нуля. Поэтому все коэффициенты g_i лежат в D.

Пусть младший член ряда g равен $g_{-t}x^{-t}$. Поскольку множество индексов i таких, что $-t \leq i \leq 0$, конечно, и все коэффициенты g_i лежат в D, то найдется такое натуральное n, что все проекции $g_i(n)$ равны нулю при $-t \leq i \leq 0$. Домножив включение $f(1-g) \in bR$ на центральный идемпотент $e(n)$, получим включение $e(n)f(1-g) \in b(n)R$. Таким образом, $e(n)x^n(1-g) \in b(n)R(n)$. Поскольку $A(n)$ — область, то произвольный ряд из кольца $R(n)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим его младший коэффициент. В силу выбора n младший член ряда $e(n)(1-g)$ равен $e(n)$. Следовательно, ряд $e(n)x^n(1-g)$ обратим в кольце $R(n)$. Тогда элемент $b(n)$ обратим в кольце $R(n)$. Тогда элемент $b(n)$ обратим в кольце $A(n)$. Получено противоречие. $\square$

Кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Модуль называется *риккартовым*, если все его циклические подмодули проективны. Правый модуль над кольцом A является риккартовым тогда и только тогда, когда аннулятор каждого его элемента порождается идемпотентом кольца A как правый идеал. Кольцо называется *риккартовым справа (слева)*, если оно является риккартовым правым (левым) модулем над собой.

Следующее предложение показывает, что аналог предложения 9.2 для колец Безу неверен.

Предложение 9.9. *Пусть A — дистрибутивная справа правая область Безу, не являющаяся телом (например, кольцо целых чисел), $B = A(1)\times A(2)\times A(3)\times\ldots$ — прямое произведение счётного числа экземпляров $A(i)$ области A. Тогда:*

(1) *B — риккартово справа и слева дистрибутивное справа редуцированное правое кольцо Безу;*

(2) *$B((x))$ — риккартово справа и слева редуцированное кольцо, которое не является ни правым кольцом Безу, ни дистрибутивным справа кольцом.*

Доказательство. (1) Так как любое прямое произведение редуцированных колец является редуцированным кольцом, то B — редуцированное кольцо.

Для каждого элемента b кольца B его правый аннулятор совпадает с левым аннулятором и порождается центральным идемпотентом e, где компоненты идемпотента e задаются следующим образом: $e(i)$ равно единице области $A(i)$ для тех i, для которых $b(i) = 0$ и $e(i)$ равно нулю для всех остальных i. Поэтому B — риккартово справа и слева кольцо.

Для того, чтобы доказать, что B — правое кольцо Безу, достаточно показать, что любой 2-порождённый правый идеал является главным правым идеалом. Пусть u, v — произвольные элементы кольца B, а $u(i), v(i)$ — проекции элементов u и v на компоненту $A(i)$. Тогда для каждого i существует $w(i)\in A$ такое, что $w(i)A = u(i)A + v(i)A$. Для элемента w кольца B с компонентами $w(i)$ выполнено равенство $wB = uB + vB$, что и требовалось доказать.

Чтобы показать, что B — дистрибутивное справа кольцо, достаточно проверить сформулированный ранее критерий дистрибутивности (лемма 9.7). Пусть u, v — произвольные элементы кольца B, а $u(i), v(i)$ — проекции элементов u и v на компоненту $A(i)$. Тогда, в силу дистрибутивности A для каждого i существует $w(i)\in A$ такое, что

$$u(i)w(i)\in v(i)A(i) \text{ и } v(i)(e(i) - w(i))\in u(i)A(i).$$

Для элемента $w \in B$ с компонентами $w(i)$ выполнены равенства $uw\in vB)$ и $v(1 - w)\in uB$, что и требовалось доказать.

(2) Так как B — редуцированное кольцо, то $B((x))$ — редуцированное кольцо.

Для каждого натурального числа i обозначим через $e(i)$ единицу кольца $A(i)$. Кольцо $B((x))$ является риккартовым справа и слева, поскольку правый аннулятор каждого его элемента f совпадает с его левым аннулятором и порождается центральным идемпотентом t кольца B, где компоненты идемпотента t задаются следующим образом: $t(i)$ равно единице области $A(i)$ для тех i, для которых $fe(i) = 0$ и $t(i)$ равно нулю для всех остальных i.

Оставшаяся часть утверждения пункта (2) следует из предложения 9.8, применённого к кольцу B, где нужно положить $\varphi = 1_B$. Все компоненты элемента b можно взять равными a, где a — произвольный ненулевой необратимый элемент кольца A. $\square$

10 Простые и полупростые кольца

Всюду в тексте под *полупростым* кольцом подразумевается артиново полупростое кольцо. Для того, чтобы получать для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов следствия из предложений о лорановских кольцах, понадобится несколько вспомогательных утверждений:

Лемма 10.1. *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм в нём, и P — двусторонний идеал в кольце A. Тогда правый идеал $\mu(P)$ в кольце косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ является двусторонним тогда и только тогда, когда $\varphi(P) = P$.*

Доказательство. Пусть $\mu(P)$ — двусторонний идеал. Тогда для любого элемента a из P выполнено включение $\varphi(a) = xax^{-1}\in\mu(P)\bigcap A = P$. Аналогично $\varphi^{-1}(a) = x^{-1}ax\in\mu(P)\bigcap A = P$, поэтому $\varphi(P)\subseteq P$ и $\varphi^{-1}(P)\subseteq P$, откуда $\varphi(P) = P$.

Пусть теперь $\varphi(P) = P$ (и, соответственно, $\varphi^{-1}(P) = P$). Для любого целого k верно равенство $\varphi^k(P) = P$. Пусть $f = \sum\limits_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$ — некоторый ряд из $\mu(P)$, так что все его коэффициенты f_i лежат в P, а $g = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} g_i x^i$ — произвольный ряд из $A((x,\varphi))$. Непосредственным раскрытием скобок проверяется, что gf лежит в $\mu(P)$ и, таким образом, $\mu(P)$ — двусторонний идеал кольца $A((x,\varphi))$. $\square$

Лемма 10.2. *Пусть A — кольцо, δ — дифференцирование в нём, и P — двусторонний идеал в кольце A. Тогда правый идеал $\mu(P)$ в кольце псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является двусторонним тогда и только тогда, когда $\delta(P)\subseteq P$.*

Доказательство. Пусть $\mu(P)$ — двусторонний идеал. Тогда для любого элемента a из P выполнено включение $\delta(a) = ta - at \in \mu(P)\bigcap A = P$.

Пусть теперь $\delta(P)\subseteq P$. Пусть $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$ — некоторый ряд из $\mu(P)$, так что все его коэффициенты f_i лежат в P, а $g = \sum\limits_{i=-\infty}^{k} f_i t^i$ — произвольный ряд из $A((t^{-1},\delta))$. Непосредственным раскрытием скобок проверяется, что gf лежит в $\mu(P)$ и, таким образом, $\mu(P)$ — двусторонний идеал кольца $A((t^{-1},\delta))$. $\square$

Лемма 10.3. *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм в нём, и P — двусторонний идеал в кольце косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$. Тогда $\mu(\lambda(P))$ — также двусторонний идеал в кольце $A((x,\varphi))$.*

Доказательство. В связи с леммой 10.1 достаточно доказать, что $\varphi(\lambda(P)) = \lambda(P)$. Действительно, пусть a — какой-то элемент из $\lambda(P)$, тогда элемент a является свободным членом какого-то ряда f из $P\bigcap U_0$. Тогда элемент xfx^{-1} также лежит в $P\bigcap U_0$ и его свободный член равен $\varphi(a)$. Аналогично свободный член элемента $x^{-1}fx$ равен $\varphi^{-1}(a)$, откуда получаем включения $\varphi(\lambda(P))\subseteq\lambda(P)$ и $\varphi^{-1}(\lambda(P))\subseteq\lambda(P)$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 10.4. *Пусть A — кольцо, δ — его дифференцирование, и P — двусторонний идеал в кольце псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$. Тогда $\mu(\lambda(P))$ — также двусторонний идеал в кольце $A((t^{-1},\delta))$.*

Доказательство. В связи с леммой 10.2 достаточно доказать, что $\delta(\lambda(P))\subseteq\lambda(P)$. Действительно, пусть a — какой-то элемент из $\lambda(P)$, тогда элемент a является свободным членом какого-то ряда f из $P\bigcap U_0$, то есть $f = a + u_1$, где b — какой-то элемент кольца A, а u_1 — какой-то ряд из U_1. Тогда элемент $tft^{-2} - ft^{-1} = \delta(a) + u_1'$ также лежит в $P\bigcap U_0$, а его свободный член равен $\delta(a)$. Отсюда получаем включение $\delta(\lambda(P))\subseteq\lambda(P)$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 10.5. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть в R выполнено условие: для каждого двустороннего идеала P кольца R правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *R — простое кольцо;*

(2) *в кольце A нет такого собственного ненулевого двустороннего идеала B, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2). Действительно, допустим B — собственный ненулевой двусторонний идеал кольца A. Тогда $\mu(B)$ — собственный ненулевой правый идеал кольца R. Поскольку R — простое кольцо, правый идеал $\mu(B)$ не является двусторонним идеалом, что и требовалось доказать.

(2)$\Longrightarrow$(1). Допустим R — не простое кольцо. Тогда в нём найдётся собственный ненулевой двусторонний идеал P. По условию правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Это означает, что двусторонний идеал $\lambda(P)$ кольца A равен либо нулю либо всему кольцу A. Он не может быть равен нулю, так как идеал P отличен от нуля. Следовательно, $\lambda(P) = A$, в частности $1{\in}\lambda(P)$, то есть в P лежит некоторый элемент $f{\in}U_0$, свободный член которого равен единице. По предложению 3.4 получаем, что f — обратимый элемент и идеал P равен всему кольцу R. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 10.6. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть B — двусторонний идеал кольца A такой, что $\mu(B)$ — двусторонний идеал кольца R. Тогда для любого правого идеала C кольца A выполнено включение $\mu(C)\mu(B) \subseteq \mu(CB)$. В частности, если идеал B нильпотентен, то и идеал $\mu(B)$ кольца R нильпотентен.*

Доказательство. Нужно доказать, что если f — произвольный элемент из $\mu(C)$, а g — произвольный элемент из $\mu(B)$, то произведение fg лежит в $\mu(CB)$. В силу закона дистрибутивности для "обобщённой бесконечной суммы" и того, что правый идеал $\mu(CB)$ замкнут относительно взятия "обобщённой бесконечной суммы", достаточно доказать это утверждение для элемента f вида $\pi(cx^n)$, где c — произвольный элемент из C, а n — целое число. Тогда $fg = \pi(c)\pi(x^n)g$, а поскольку $\mu(B)$ — двусторонний идеал, элемент $g'\pi(x^n)g$ лежит в $\mu(B)$. Если теперь $\{b_i\}$ — левые коэффициенты элемента g', то левые коэффициенты элемента $\pi(c)g'$ — это $\{cb_i\}$, поэтому элемент $\pi(c)g'$ лежит в $\mu(CB)$, что и требовалось доказать.

Из доказанного выше вытекает, что $\mu(B^{n-1})\mu(B) \subseteq \mu(B^n)$, откуда легко получаем включение $(\mu(B))^n \subseteq \mu(B^n)$. Поэтому если идеал B нильпотентен, то и идеал $\mu(B)$ нильпотентен. □

Теорема 10.7. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть в R выполнено условие: для каждого двустороннего идеала P кольца R правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *R — полупростое артиново кольцо;*
(2) *A — артиново кольцо и в его радикале $J(A)$ не содержится никакой ненулевой двусторонний идеал B такой, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним.*

Доказательство. Допустим, R — полупростое артиново кольцо. Тогда, в силу предложения 8.2, A — артиново справа кольцо и, следовательно, его радикал $J(A)$ нильпотентен. Допустим, что в $J(A)$ содержится ненулевой двусторонний идеал B такой, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. Тогда B — нильпотентный идеал и по лемме 10.6 двусторонний идеал $\mu(B)$ также является нильпотентным. Но в R нет ненулевых нильпотентных идеалов. Полученное противоречие завершает доказательство в одну сторону.

Пусть теперь A — артиново кольцо и в $J(A)$ не содержится никакой ненулевой двусторонний идеал B такой, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. По предложению 8.2 кольцо R также является артиновым справа. Допустим, радикал Джекобсона $J(R)$ отличен от нуля. Тогда $\lambda(J(R))$ — двусторонний идеал кольца A, лежащий в $J(A)$ (в силу леммы 4.2). При этом $\mu(\lambda(J(R)))$ — двусторонний идеал кольца R, что противоречит условию. Полученное противоречие завершает доказательство. □

На основе теоремы 10.5 можно получить критерии простоты кольца псевдодифференциальных операторов и кольца косых рядов Лорана:

Теорема 10.8. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *$A((x,\varphi))$ — простое кольцо;*
(2) *кольцо A не имеет таких нетривиальных двусторонних идеалов B, что $\varphi(B) = B$.*

Доказательство. В силу леммы 10.3, в кольце косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ выполнены условия теоремы 10.5. Применение леммы 10.1 завершает доказательство. □

Теорема 10.9. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *$A((t^{-1},\delta))$ — простое кольцо;*
(2) *кольцо A не имеет таких нетривиальных двусторонних идеалов B, что $\delta(B)\subseteq B$.*

Доказательство. В силу леммы 10.4, в кольце псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ выполнены условия теоремы 10.5. Применение леммы 10.2 завершает доказательство. $\square$

Можно также получить следствия теоремы 10.7 для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов:

Теорема 10.10. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *$A((x,\varphi))$ — полупростое артиново кольцо;*
(2) *A — полупростое артиново кольцо.*

Доказательство. В силу леммы 10.3, в кольце косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ выполнены условия теоремы 10.7. В силу леммы 10.1, учитывая, что $\varphi(J(A)) = J(A)$, получаем, что правый идеал $\mu(J(A))$ кольца $A((x,\varphi))$ всегда является двусторонним. С учетом этого заключение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 10.7. $\square$

Теорема 10.11. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *$A((t^{-1},\delta))$ — полупростое артиново кольцо;*
(2) *A — артиново справа кольцо, причём для любого ненулевого элемента j радикала $J(A)$ существует натуральное число n, такое что элемент $\delta^n(j)$ не лежит в $J(A)$.*

Доказательство. В силу леммы 10.4, в кольце косых рядов Лорана $A((t^{-1},\delta))$ выполнены условия теоремы 10.7. С учётом леммы 10.2 остаётся проверить, что в $J(A)$ тогда и только есть ненулевой двусторонний идеал B такой, что $\delta(B)\subseteq B$, когда в $J(A)$ найдётся ненулевой элемент j такой, что $\delta^n(j)$ лежит в $J(A)$ для всех натуральных n.

Действительно, если такой идеал B существует, то в качестве j можно взять любой его ненулевой элемент. Обратно, пусть существует такой элемент j. Тогда рассмотрим двусторонний идеал, порождённый элементами j, $\delta(j)$, $\delta^2(j)$ и т.д. Все его элементы являются конечными суммами произведений вида $a_1\delta^n(j)a_2$, где n — неотрицательное целое число. Достаточно показать, что дифференцирование δ переводит произведение такого вида в сумму произведений такого же вида. Действительно,

$$\delta(a_1\delta^n(j)a_2) = \delta(a_1)\delta^n(j)a_2 + a_1\delta^{n+1}(j)a_2 + a_1\delta^n(j)\delta(a_2),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Модуль называется *цепным*, если все его подмодули образуют цепь относительно включения. Модуль называется *полуцепным*, если он является прямой суммой цепных модулей. Кольцо называется *цепным (полуцепным) справа*, если оно является цепным (полуцепным) правым модулем над собой.

В связи с теоремами 10.9 и 10.11 приведем следующий пример.

Предложение 10.12. *Пусть F — поле ненулевой характеристики p, $K = F[x]$ — кольцо многочленов. Тогда коммутативное кольцо $A = K/x^pK$ является цепным артиновым, но не является полем. В кольце A можно ввести дифференцирование δ с учетом правил $\delta(x^n) = nx^{n-1}$ и $\delta(a) = 0$ для каждого элемента a из поля F. При этом кольцо $A((t^{-1}, \delta))$ изоморфно кольцу всех $p\times p$-матриц над полем $F((t^{-p}))$, состоящим из рядов вида $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^{pi}$, где все коэффициенты f_i лежат в F. В частности, $A((t^{-1}, \delta))$ — простое артиново кольцо, не являющееся цепным кольцом.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что все идеалы в кольце A исчерпываются идеалами вида x^kA, где k — целое число от 0 до p. Отсюда следует, что A — цепное артиново кольцо (при этом $1\in\delta(J(A))$). Легко видеть, что множество $F((t^{-p}))$ является подкольцом в $A((t^{-1}, \delta))$ и изоморфно кольцу рядов Лорана $F((s))$ (изоморфизм переводит s в t^{-p}), следовательно, оно является полем. Поскольку для всех натуральных k и n справедливо равенство $t^nx^k = x^kt^n + nx^{k-1}t^{n-1}$, то для всех натуральных k элементы x^k и t^p кольца $A((t^{-1}, \delta))$ коммутируют, поэтому все элементы поля $F((t^{-p}))$ лежат в центре кольца $A((t^{-1}, \delta))$. Таким образом, кольцо $A((t^{-1}, \delta))$ является алгеброй над полем $F((t^{-p}))$. Ясно, что размерность этой алгебры как линейного пространства над полем составляет p^2.

Если B — какой-либо двусторонний идеал кольца $A((t^{-1}, \delta))$, а $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$ — его произвольный элемент, то идеал B содержит также элемент $ft - tf = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} \delta(f_i)t^i$. Поэтому правый идеал $\lambda(B)$ кольца A обладает свойством $\delta(\lambda(B)) \subseteq \lambda(B)$. Однако кольцо A не имеет нетривиальных правых идеалов с этим свойством. Поэтому если B — ненулевой идеал, то $\lambda(B) = A$ и, следовательно в B найдётся элемент $b\in U_0$ со свободным членом, равным единице. Из предложения 3.4 следует, что $B = A((t^{-1}, \delta))$. Значит, $A((t^{-1}, \delta))$ — простое кольцо.

Согласно предложению 8.2 $A((t^{-1}, \delta))$ — артиново справа простое кольцо. Поэтому существуют такое тело H и натуральное число l, что $A((t^{-1}, \delta))$ изоморфно кольцу всех $l\times l$-матриц над H. Центр кольца матриц лежит в подкольце скалярных матриц, изоморфном телу H, а поле $F((t^{-p}))$ лежит в центре кольца $A((t^{-1}, \delta))$. Поэтому тело H содержит подполе, изоморфное полю $F((t^{-p}))$.

Пусть размерность тела H как линейного пространства над $F((t^{-p}))$

составляет s. Тогда размерность кольца $A((t^{-1},\delta))$ над полем $F((t^{-p}))$ равна $p^2 = l^2 s$. Поскольку p — простое число, то либо $l = 1$, либо $s = 1$ и $l = p$. Если $l = 1$, то $A((t^{-1},\delta))$ — тело, но это невозможно, так как $A((t^{-1},\delta))$ имеет ненулевой нильпотентный элемент x. Если $s = 1$ и $l = p$, то $H = F((t^{-p}))$. Таким образом, кольцо $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $p\times p$-матриц над полем $F((t^{-p}))$.

Для наглядности построим в явном виде p ненулевых взаимно ортогональных идемпотентов в кольце $A((t^{-1},\delta))$, дающих в сумме единицу. Для этого выведем некоторые соотношения в кольце $A((t^{-1},\delta))$. Заметим вначале, что имеет место соотношение $tx = xt + 1$. Для любого натурального n

$$x^n t^n = x^{n-1}(xt^{n-1})t = x^{n-1}(t^{n-1}x - (n-1)t^{n-2}t =$$
$$= x^{n-1}t^{n-1}(xt) - (n-1)x^{n-1}t^{n-1} = x^{n-1}t^{n-1}(xt - (n-1)).$$

Отсюда легко получаем, что $x^n t^n = \prod\limits_{i=0}^{n-1}(xt - i)$. В частности, $0 = x^p t^p = \prod\limits_{i=0}^{p-1}(xt - i)$. Обозначим xt через y и из хорошо известного равенства

$$\prod_{i=0}^{p-1}(y-i) \equiv y^p - y \pmod p$$

получаем, что $y^p = y$. Нетрудно видеть, что ни один многочлен от y степени меньше p над полем F хотя бы с одним ненулевым коэффициентом не равен нулю, поскольку из доказанных выше соотношений вытекает, что множество всех многочленов от y над F совпадает с линейной оболочкой всех одночленов $x^n t^n$ над полем F и, следовательно, размерность этого множества как линейного пространства равна p.

Рассмотрим теперь для каждого j от 0 до $p-1$ многочлен $e_j(u) = \prod\limits_{i\neq j}(u-i)$ от переменной u над полем F, где произведение берется по всем i от 0 до $p-1$, исключая j. Тогда, очевидно, степень многочлена $e_j(u)$ равна $p-1$. Поэтому элемент $e_j(y)$ отличен от нуля для всех j. Кроме того, если $j_1 \neq j_2$, то многочлен $e_{j_1}(u)e_{j_2}(u)$ делится на $\prod\limits_{i=0}^{p-1}(u-i) = u^p - u$. Значит, $e_{j_1}(y)e_{j_2}(y) = 0$. Из известного равенства $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ вытекает, что $e_j(j) = -1$ для всех j. Поэтому многочлен $e_j(u)+1$ делится на $u-j$. Следовательно, $e_j(u)(e_j(u)+1)$ делится на $\prod\limits_{i=0}^{p-1}(u-i) = u^p - u$. А это значит, что $e_j(y)(e_j(y)+1) = 0$, т.е. $e_j^2(y) = -e_j(y)$. Непосредственно проверяется, что для каждого i от 0 до $p-1$ выполняется равенство $\sum\limits_{j=0}^{p-1} e_j(i) \equiv -1 \pmod p$. Поэтому многочлен $1 + \sum\limits_{j=0}^{p-1} e_j(u)$ степени не выше $p-1$ имеет по крайней мере p корней. Отсюда следует, что $\sum\limits_{j=0}^{p-1} e_j(u) = -1$, в частности $\sum\limits_{j=0}^{p-1} e_j(y) = -1$.

Из всего доказанного выше вытекает, что элементы $-e_j(y)$ ($j = 1, \ldots, p-1$) образуют систему из p ненулевых попарно ортогональных идемпотентов кольца $A((t^{-1}, \delta))$, дающих в сумме единицу. □

11 Цепные и полуцепные кольца

Кольцо называется *полулокальным*, если его факторкольцо по радикалу Джекобсона является артиновым. Кольцо полулокально тогда и только тогда, когда его радикал Джекобсона совпадает с пересечением некоторого конечного набора максимальных правых идеалов (или максимальных левых идеалов).

Подмодуль N модуля M называется *вполне инвариантным*, если для любого эндоморфизма f модуля M выполнено включение $f(N) \subseteq N$. Кольцо называется *инвариантным справа (слева)*, если все его правые (левые) идеалы являются вполне инвариантными подмодулями кольца как модуля над собой. Кольцо является инвариантным справа (слева), тогда и только тогда, когда все его правые (левые) идеалы являются одновременно и левыми (правыми) идеалами.

Следующие две вспомогательные леммы 11.1 и 11.2 являются частными случаями хорошо известных результатов (см., например, [54]) и приведены здесь с доказательствами только для удобства.

Лемма 11.1. *Пусть M_A — цепной модуль с условием максимальности для циклических подмодулей. Тогда M — нётеров модуль, все подмодули которого являются циклическими вполне инвариантными подмодулями в M.*

Доказательство. Допустим M — не нётеров модуль. Тогда существует бесконечная строго возрастающая последовательность подмодулей $\{M_i\}$ модуля M. Пусть $x_i \in (M_{i+1} \setminus M_i)$, $x_i A \not\subseteq M_i$, а M — цепной модуль. Следовательно, $M_i \subset x_i A$ и $x_i A \subseteq M_{i+1}$. Таким образом $x_{i-1} A \subset M_i \subset x_i A$. Но последовательность циклических подмодулей $x_i A$ стабилизируется, начиная с некоторого i. Поэтому стабилизируется и последовательность M_i. Противоречие. Таким образом, M — нётеров модуль. Произвольный подмодуль N нётерового модуля M является конечнопорождённым. Цепной конечнопорождённый модуль N является циклическим. Осталось доказать, что если f — эндоморфизм модуля M, N — подмодуль модуля M, то $f(N) \subseteq N$. Допустим противное. Так как M — цепной модуль и $f(N) \not\subseteq N$, то N строго содержится в $f(N)$. Тогда $\ker(f) \subseteq N$ (в противном случае $f(N) = 0 \subseteq$

N). Поскольку $N \subset f(N)$, то $f^i(N) \subseteq f^{i+1}(N)$. Пусть $a \in f(N) \backslash N$, тогда $f^i(a) \in f^{i+1}(N)$. Предположим $f^i(a) \in f^i(N)$ (т. е. $f^i(a) = f^i(b_i), b_i \in N$). Но тогда $f^{i-1}(a) = f^{i-1}(b_i) + c, c \in \ker(f) \subseteq N \subseteq f^{i-1}(N)$, а следовательно $f^{i-1}(a) = f^{i-1}(b_{i-1})$. Продолжая это построение, получим $a = b_0 \in N$ — противоречие. Следовательно, $f^{i+1}(N)$ строго содержит $f^i(N)$ для всех i. Получена бесконечная строго возрастающая цепочка подмодулей $f^i(N)$, а это противоречит тому, что M — нётеров модуль. □

Кольцо называется *полупервичным*, если для любого его правого идеала I из равенства $I^2 = 0$ следует, что $I = 0$. Кольцо называется *первичным*, если для любых его правых идеалов I и J из равенства $IJ = 0$ следует равенство $I = 0$ или равенство $J = 0$. Двусторонний идеал I кольца A называется *полупервичным*, если факторкольцо A/I полупервично, *первичным*, если кольцо A/I первично, и *вполне первичным*, если факторкольцо A/I является областью. Кольцо называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона нильпотентен, а факторкольцо по радикалу Джекобсона — тело.

Лемма 11.2. *Пусть A — цепное справа кольцо. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *если A — нётерово справа кольцо, то A — инвариантное справа кольцо главных правых идеалов;*
(2) *если A — полупримарное кольцо, то A — инвариантное справа кольцо главных правых идеалов, в котором каждый собственный правый идеал совпадает с какой-либо степенью радикала $J(A)$, причем $A/J(A)$ — тело;*
(3) *если A — полупервичное кольцо, то A — первичное кольцо;*
(4) *если A — инвариантное справа полупервичное кольцо, то A — область;*
(5) *если A — нётерово справа кольцо, то его первичный радикал N является вполне первичным идеалом.*

Доказательство. (1) Рассмотрим A как правый модуль над собой. Тогда A — кольцо главных правых идеалов в силу леммы 11.1. При этом каждый идеал B инвариантен относительно любых модульных эндоморфизмов модуля A_A. Рассмотрим эндоморфизм $\psi_a : A_A \longrightarrow A_A$ левого умножения на a: $\psi_a(x) = ax$. Тогда $aB = \psi_a(B) \subseteq B$ для любого правого идеала B в кольце A. Это означает, что A — инвариантное справа кольцо.

(2) Пусть $J \equiv J(A)$. Тогда A/J — цепное справа артиново справа кольцо с нулевым радикалом Джекобсона. Полупростое кольцо A/J является конечной прямой суммой минимальных правых идеалов. Учитывая, что A/J — цепное справа кольцо, получаем, что A/J — тело. Рассмотрим J^i/J^{i+1} как модуль над телом A/J (это действительно A/J-модуль,

так как $(j_i + J^{i+1})(a + J) = j_i a + J^{i+1})$. Цепной A/J-модуль J^i/J^{i+1} неразложим, поэтому J^i/J^{i+1} — одномерное линейное пространство над телом A/J. В частности, J^i/J^{i+1} — простой A/J-модуль. Тогда J^i/J^{i+1} — простой A-модуль.

Пусть теперь B — произвольный правый идеал кольца A. Кольцо A цепное, $J^0 = A$ и $J^n = 0$. Поэтому существует такое натуральное i, что $J^{i+1} \subseteq B \subseteq J^i$. Тогда $B/J^{i+1} \subseteq J^i/J^{i+1}$. Кроме того, J^i/J^{i+1} — простой модуль. Поэтому $B = J^i$ или $B = J^{i+1}$. Таким образом, в кольце A каждый правый идеал совпадает с какой-то степенью идеала J. Так как J — двусторонний идеал, то кольцо A инвариантно справа. Осталось доказать, что A — кольцо главных правых идеалов. Поскольку A имеет лишь конечное число правых идеалов, то A — нётерово справа кольцо и можно применить утверждение (1).

(3) Допустим противное, т.е. A — не первичное кольцо. Тогда в кольце A существуют такие идеалы B и C, что $BC = 0$. Так как A — цепное кольцо, то либо $B \subseteq C$, либо $C \subseteq B$. Пусть для определенности $B \subseteq C$. Тогда $B^2 \subseteq BC = 0$, откуда $B^2 = 0$. Поскольку A — полупервичное кольцо, получили противоречие.

(4) Согласно (3), A — первичное кольцо. Допустим теперь, что A — не область. Тогда существуют такие ненулевые элементы $a, b \in A$, что $ab = 0$. Правый аннулятор $r(a)$ элемента a является правым идеалом кольца A. Так как A — инвариантное справа кольцо, то $r(a)$ — левый идеал в A. Поэтому из включения $b \in r(a)$ следует включение $Rb \subseteq r(a)$. Значит, $aRb = 0$. Отсюда $aRbR = 0$, что противоречит первичности кольца A.

(5) В силу (1) A является инвариантным справа кольцом. Этим же свойством обладает и кольцо A/N. Поэтому A/N — инвариантное справа полупервичное кольцо, являющееся, согласно (4), областью. Это означает, что N — вполне первичный идеал. □

Лемма 11.3. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть R — цепное справа кольцо. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *A — цепное справа кольцо;*

(2) *все элементы кольца A, не являющиеся левыми делителями нуля, обратимы справа;*

(3) *если кольцо A обладает нильпотентным вполне первичным идеалом N, то A — цепное справа артиново справа кольцо;*

(4) *если A — нётерово справа кольцо, то A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. (1) Пусть a, b — ненулевые элементы кольца коэффициентов A, а $\pi(a)$ и $\pi(b)$ их образы в лорановском кольце R при каноническом вложении (см. определение). Так как R — цепное справа кольцо, то можно без ограничения общности считать, что существует такой элемент $f \in R$, что $\pi(a) = \pi(b)f$. Пусть $f = \pi(g)$, где g — некоторый ряд из $A((x))$. Тогда получаем $\pi(a) = \pi(b)\pi(g) = \pi(bg)$, откуда $a = bg$. Приравняв коэффициенты при x^0, получим, что $a = bg_0$, где $g_0 \in A$ — соответствующий коэффициент ряда g. Таким образом, A — цепное справа кольцо.

(2) Пусть $a \in A$ и элемент a не является левым делителем нуля в кольце A. Надо доказать, что элемент a обратим справа. Рассмотрим элементы $a, a + y$ кольца R, где y — обратимый элемент из условия (ii). Так как R — цепное справа кольцо, то либо $a + y \in aR$, либо $a \in (a + y)R$. Поэтому либо существует такой элемент $f \in R$, что $y = (a + y) - a = afy$, либо существует такой элемент $f \in R$, что $y = (a + y) - a = (a + y)fy$. В первом случае обозначим a за a', во втором случае обозначим $a+y$ за a' и получим, что в обоих случаях $1 = a'f$, где $a' \in U_0$ и свободный член a' равен a.

Представим f в виде $f'y^n$, где $f' \in U_0$ и свободный член f' отличен от нуля. Тогда свободный член произведения $a'f'$ отличен от нуля (поскольку свободный член a' не является левым делителем нуля) и получаем, что $1 = a'f = a'f'y^n$ лежит в U_n, но не лежит в U_{n+1}. Поэтому $n = 0$ и определен свободный член элемента f, обозначим его за f_0. Из равенства $a'f = 1$ получаем $af_0 = 1$, то есть элемент a обратим справа, что и требовалось доказать.

(3) Поскольку N — вполне первичный идеал, то все элементы множества $A \backslash N$ не являются левыми делителями нуля. Согласно (2), эти элементы обратимы справа. Поэтому $F = A/N$ — тело. Пусть $N^k = 0$. Фактормодуль $M = N^i/N^{i+1} (0 < i < k)$ можно рассматривать как модуль над F. Кроме того, поскольку A — цепное справа кольцо, модуль M — цепной над телом F. Следовательно, M является простым F-модулем и порождается любым своим ненулевым элементом. Пусть теперь L — произвольный собственный правый идеал в A. Если $N \subseteq L$, то L/N — собственный правый идеал в теле F и тогда $L = N$.

Пусть теперь $N \not\subseteq L$. Так как A — цепное справа кольцо, то $L \subseteq N$. Пусть $i < k + 1$ — такое натуральное число, что $N^i \subseteq L \subset N^{i+1}$ (второе включение — строгое). Рассмотрим L/N^{i+1} как подмодуль модуля N^i/N^{i+1} над F. Ввиду того, что N^i/N^{i+1} — простой модуль, имеем $L = N^i$. Таким образом, для любого правого идеала L существует такое i, что $L = N^i$. Отсюда получаем, что кольцо A имеет ровно k собственных правых идеалов. В частности, A — артиново справа кольцо.

(4) Так как A — нётерово справа кольцо, то его первичный радикал нильпотентен. Согласно утверждению (5) леммы 11.2, он является также вполне первичным идеалом. Применяя утверждение (3) данной леммы, получаем, что A — цепное справа артиново справа кольцо. $\square$

Теорема 11.4. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *R — цепное справа кольцо;*
(2) *R — цепное справа артиново справа кольцо;*
(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\mu(J(A))$ — двусторонний идеал кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Импликация (2)$\Longrightarrow$ (1) очевидна.

(1)$\Longrightarrow$ (3). Докажем вначале, что если R — цепное справа кольцо, то A нётерово справа. Отметим вначале, что A — цепное справа кольцо в силу утверждения (1) леммы 11.3. Допустим, что в кольце A существует бесконечная строго возрастающая цепь $a_1A \subset a_2A \ldots \subset a_nA \subset \ldots$ главных правых идеалов $\{a_nA\}$ кольца A. Разобьем последовательность $\{a_n\}$ на две подпоследовательности $\{f_n\}, \{g_n\}$ так, чтобы в последовательность $\{f_n\}$ попали те члены последовательности $\{a_n\}$, номер которых в двоичной системе счисления состоит из нечётного числа цифр, а в $\{g_n\}$ — из чётного:

$$\{f_n\} = a_1, a_4, a_5, a_6, a_7, a_{16}, \ldots, a_{2^{2i}}, a_{2^{2i}+1}, \ldots a_{2^{2i+1}-1}, \ldots,$$

$$\{g_n\} = a_2, a_3, a_8, \ldots, a_{2^{2i+1}}, a_{2^{2i+1}+1}, \ldots, a_{2^{2i+2}-1}, \ldots.$$

Определим теперь ряды $f, g \in A((x))$ равенствами

$$f = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots, \; g = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots.$$

По условию $\pi(f) = \pi(g)r$ или $\pi(g) = \pi(f)r$, где r — некоторый элемент кольца R. Пусть для определенности $\pi(f) = \pi(g)r$ и k — такое натуральное число, что $r \in U_{-k} = \pi(V_{-k})$. Тогда для любого натурального числа n имеем

$$\pi(f) = \pi(g)r = \pi(g_0 + g_1x + \ldots + g_{k+n}x^{n+k})r + \pi(g_{k+n+1}x^{n+k+1} + \ldots)r.$$

Поскольку r лежит в U_{-k}, то второй член слагаемого лежит в U_{n+1}. Если приравнять n-ые левые коэффициенты обеих частей равенства, то получим, что $f_n \in g_0A + g_1A + \ldots + g_{n+k}A = g_{n+k}A$. Пусть $n_1(i) = 1+4+16+\ldots+2^{2i}$, тогда $f_{n_1(i)} = a_{2^{2i+2}}$. Аналогично $n_2(i) = 2 + 8 + \ldots + 2^{2i+1} - 1$, откуда $g_{n_2(i)} = a_{2^{2i+2}-1}$. Тогда $n_2(i) - n_1(i) = 1 + 4 + 16 + \ldots + 2^{2i} - 1$. Подберем такое i, что $n_2 - n_1 > k$. Из включения $f_{n_1} \in g_{n_1+k}A \subset g_{n_2}A$ следует включение $a_{2^{2i+2}} \in a_{2^{2i+2}-1}A$. Получено противоречие с тем, что $a_{2^{2i+2}-1}A$ строго содержится в $a_{2^{2i+2}}A$.

Таким образом, A — кольцо с условием максимальности для главных правых идеалов. По лемме 11.1 кольцо A нётерово справа. Применяя теперь утверждение (4) леммы 11.3, получаем, что A — цепное справа артиново справа кольцо. Осталось доказать, что $\mu(J(A))$ — двусторонний идеал кольца R.

По предложению 8.2 кольцо R артиново справа. В силу утверждения (1) леммы 11.2 кольцо R инвариантно справа. Но тогда правый идеал $\mu(J(A))$ является двусторонним идеалом.

(3)$\Longrightarrow$ (2). Цепное справа артиново справа кольцо A является полупримарным кольцом с радикалом Джекобсона J. Согласно утверждению (2) леммы 11.2, A — кольцо главных правых идеалов, в котором каждый собственный правый идеал совпадает с какой-либо степенью J, причем A/J — тело. Рассмотрим факторкольцо $R/\mu(J)$ (по условию $\mu(J)$ — двусторонний идеал). В силу леммы 4.3 кольцо $R/\mu(J)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A/J, откуда в силу теоремы 7.1 получаем, что $R/\mu(J)$ — тело.

Так как A — кольцо главных правых идеалов, то J как правый идеал порождается одним элементом j, а $\mu(J)$ — элементом $\pi(j)$. Тогда

$$J^2 = jAjA = j(AjA) = jJ = jjA = j^2A.$$

Аналогично доказывается, что $J^n = j^nA$ и $\mu(J)^n = \pi(j^n)R$. Поэтому $\mu(J)^n = \mu(J^n)$. Так как идеал J нильпотентен, то $\mu(J)$ — нильпотентный идеал кольца R. В виду того, что идеал $\mu(J^n)$ является главным правым идеалом кольца R, модуль $\mu(J^n)/\mu(J^{n+1})$ — одномерное линейное пространство над телом $R/\mu(J)$.

Докажем теперь, что $\mu(J^n)$ как правый идеал порождается любым элементом $r\in\mu(J^n)\setminus\mu(J^{n+1})$ (число n может быть равно нулю, тогда $\mu(J^n) = R$). Действительно, так как $\mu(J^n)/\mu(J^{n+1})$ — одномерное линейное пространство над телом $R/\mu(J)$, то существует элемент $a \in R$ такой, что $(r+\mu(J^{n+1}))(a+\mu(J)) = j^n+\mu(J^{n+1})$. Значит, $ra = j^n(1+k)$, где $k \in \mu(J)$. Поскольку k — нильпотентный элемент, то $1+k$ — обратимый элемент. Поэтому $ra(1+k)^{-1} = j^n$, а отсюда следует, что элемент r порождает (как правый идеал) весь идеал $\mu(J^n)$.

Пусть теперь B — какой-либо собственный правый идеал кольца R, а n — минимальное натуральное число, такое, что $\mu(J^n)\subseteq B$. Допустим, $B\neq\mu(J^n)$, тогда существует натуральное $i < n$, такое, что пересечение $(\mu(J^i)\setminus\mu(J^{i+1}))\bigcap B$ непусто. Но тогда по доказанному выше $\mu(J^i)\subseteq B$. Получили противоречие. Поэтому любой собственный правый идеал в R совпадает с какой-то степенью $\mu(J)$, откуда R — цепное справа артиново справа кольцо. $\square$

Теперь из теоремы 11.4 получим её следствия для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

Теорема 11.5. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *$A((x, \varphi))$ — цепное справа кольцо;*
(2) *$A((x, \varphi))$ — цепное справа артиново справа кольцо;*
(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. Из леммы 10.1 сразу вытекает, что правый идеал $\mu(J(A))$ кольца $A((x, \varphi))$ всегда является двусторонним идеалом (поскольку радикал Джекобсона любого кольца переходит в себя при любом автоморфизме). Тогда утверждение теоремы вытекает из теоремы 11.4 и предложения 6.1. □

Теорема 11.6. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *$A((t^{-1}, \delta))$ — цепное справа кольцо;*
(2) *$A((t^{-1}, \delta))$ — цепное справа артиново справа кольцо;*
(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\delta(J(A))\subseteq J(A)$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 10.2, теоремы 11.4 и предложения 6.2. □

В связи с теоремой 11.6 отметим, что в предложении 10.12 построен пример цепного артинова кольца с таким дифференцированием в нём, что кольцо псевдодифференциальных операторов не является цепным.

Теорема 11.7. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть правый идеал $\mu(J(A))$ является двусторонним идеалом кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A. Тогда равносильны следующие условия:*
(1) *кольцо R является полуцепным справа артиновым справа;*
(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. Обозначим радикал Джекобсона кольца A через J.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Поскольку кольцо A является полуцепным справа, в нём существует конечная система попарно ортогональных идемпотентов e_i ($i = 1, \ldots, n$) такая, что $\sum e_i = 1$ и e_iA — цепной модуль над A для каждого i. Для каждого идемпотента e и двустороннего идеала I верно равенство $eA \cap I = eI$. В частности, для всех $i = 1, \ldots, n$ и неотрицательных целых k выполнено равенство $e_iA \cap J^k = e_iJ^k$ (полагаем, что $J^0 = A$).

В силу того, что A — артиново справа кольцо, идеал J нильпотентен и кольцо A/J является полупростым. Следовательно, все модули J^k/J^{k+1}

над A/J также являются полупростыми. Поэтому для всех i и k цепной модуль $e_iJ^k/e_iJ^{k+1} \cong (e_iJ^k + J^{k+1})/J^{k+1} \subseteq J^k/J^{k+1}$ является простым (над A/J и, следовательно, над A). Так как модуль e_iA является цепным для каждого i, то все его подмодули исчерпываются модулями e_iJ^k, среди которых лишь конечное число отлично от нуля в силу нильпотентности J. При этом каждый модуль e_iJ^k порождается любым своим элементом, не лежащим в модуле e_iJ^{k+1}.

Рассмотрим теперь радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R. По предложению 4.2 он лежит в правом идеале $\mu(J)$. Радикал J кольца A нильпотентен и, поскольку правый идеал $\mu(J)$ по условию является двусторонним, можно применить лемму 10.6, откуда получаем, что идеал $\mu(J)$ также является нильпотентным и, следовательно, лежит в $J(R)$. Поэтому $J(R) = \mu(J)$. Рассмотрим теперь правые идеалы $e_iR = \mu(e_iA)$ кольца R. Их прямая сумма равна R. Докажем теперь, что для каждого i правый идеал e_iR является цепным модулем над R.

Пусть $f \in e_iR$ — ненулевой элемент. Для некоторого неотрицательного k выполнено включение $f \in \mu(e_iJ^k) \setminus \mu(e_iJ^{k+1})$. Рассмотрим правый идеал $P = fR + \mu(e_iJ^{k+1})$ кольца R. Он лежит в $\mu(e_iJ^k)$ и содержит $\mu(e_iJ^{k+1})$. Тогда $\lambda(P)$ лежит в e_iJ^k и содержит e_iJ^{k+1}. Так как e_iJ^k/e_iJ^{k+1} — простой модуль, то $\lambda(P)$ совпадает либо с e_iJ^k, либо с e_iJ^{k+1}. Но правые идеалы e_iJ^{k+1} и e_iJ^k являются главными, поэтому можно применить лемму 3.3 и получить, что $P = \mu(e_iJ^{k+1})$, что невозможно по выбору k, или $P = \mu(e_iJ^k)$.

Из равенства $fR + \mu(e_iJ^{k+1}) = \mu(e_iJ^k)$ следует, что в правом идеале fR найдется элемент g вида $\pi(e_ij_k) + r$, где e_ij_k — элемент кольца A, порождающий правый идеал e_iJ^k, а r — произвольный элемент из $\mu(e_iJ^{k+1})$. Тогда порождающий элемент главного правого идеала e_iJ^{k+1} может быть представлен в виде e_ij_kj, где j — некоторый элемент из J, и поэтому $r \in \mu(e_iJ^{k+1}) = \pi(e_ij_kj)R = \pi(e_ij_k)\pi(j)R$, откуда $f \in \pi(e_ij_k)(1 + \pi(j)R)$. В силу того, что $J(R) = \mu(J)$, все элементы из $1 + \pi(j)R$ обратимы, следовательно, $\pi(e_ij_k) \in fR$, откуда $fR = \mu(e_iJ^k)$. Таким образом, все подмодули модуля e_iR исчерпываются модулями $\mu(e_iJ^k)$ и e_iR — цепной артинов модуль.

Следовательно, модуль R_R является конечной прямой суммой цепных артиновых модулей. Поэтому R — полуцепное справа артиново справа кольцо, что и требовалось доказать.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть π — вложение кольца A в кольцо R как в определении 2 лорановского кольца. В силу предложения 8.2 кольцо A артиново справа. Таким образом, радикал J нильпотентен. По предложению 4.2 радикал $J(R)$ лежит в правом идеале $\mu(J)$. Радикал J кольца A нильпотентен и, поскольку правый идеал $\mu(J)$ по условию является двусторонним, можно применить лемму 10.6, откуда получаем, что идеал $\mu(J)$ также является нильпотентным и, следовательно, лежит в $J(R)$. Поэтому $J(R) = \mu(J)$.

Рассмотрим полупростое кольцо $B\equiv A/J$ и в нем систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ такую, что $\sum e_i = 1$. По лемме 4.3 кольцо $S = R/\mu(J)$ также является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов B. Легко видеть, что отображение π_S из B в S, определённое соотношением $\pi_S(a+J) = \pi(a)+\mu(J)$ является вложением кольца B в кольцо S, удовлетворяющим условию (iv) определения лорановского кольца. Все идеалы e_iB являются минимальными. Поэтому для каждого i по лемме 3.3 правый идеал $\pi_S(e_i)S$ порождается своим любым ненулевым элементом, то есть является минимальным. Таким образом, идемпотенты $\pi_S(e_i)$ являются примитивными в полупростом кольце S. В силу полупримарности кольца A полную конечную систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ кольца A/J можно поднять до полной системы примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{d_i\}$ кольца A. Тогда все идемпотенты $\pi(d_i)$ будут примитивны в кольце R, поскольку примитивны их образы $\pi(d_i) + J(R) = \pi_S(e_i)$ в кольце $R/J(R)$.

Так как R — полуцепное справа кольцо и любое прямое разложение артинова справа кольца R в прямую сумму ненулевых неразложимых правых идеалов является единственным с точностью до изоморфизма, то все правые идеалы $\pi(d_i)R$ кольца R являются цепными модулями над R. Кроме того, для каждого i решетка подмодулей правого идеала d_iA вкладывается в решетку подмодулей d_iR с помощью отображения $M\longrightarrow\mu(M)$. Поэтому модуль d_iA тоже является цепным, и кольцо A представляется в виде прямой суммы конечного числа цепных модулей d_iA. Следовательно, A — полуцепное справа кольцо. □

Теорема 11.8. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо $A((x,\varphi))$ является полуцепным справа артиновым справа;*

(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. Отметим, что в силу леммы 10.1 и того, что $\varphi(J(A)) = J(A)$, выполнены условия теоремы 11.7, из которой и следует заключение теоремы. □

Теорема 11.9. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём, причём для радикала Джекобсона $J(A)$ кольца A выполнено включение $\delta(J(A))\subseteq J(A)$. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является полуцепным справа артиновым справа;*

(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. Отметим, что в силу леммы 10.2 выполнены условия теоремы 11.7, из которой и следует заключение теоремы. □

12 Дистрибутивные полулокальные кольца

Лемма 12.1. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть кольцо R инвариантно справа, а кольцо A редуцированно. Тогда:*

(1) *если φ — автоморфизм кольца коэффициентов A, переводящий элемент $u_0 + U_1$ в элемент $\pi(x)u_0\pi(x^{-1}) + U_1$, то $\varphi^n(a)A = aA$ для всех a из A и для всех целых n;*

(2) *если для элементов r, s из U_0 и для целого числа n выполнено соотношение $r\pi(x^n)s \in U_{n+1}$, то для свободных членов r_0 и s_0 выполнены соотношения $r_0s_0 = 0$ и $s_0r_0 = 0$.*

(3) *если для свободных членов r_0 и s_0 элементов r, s из U_0 выполнено соотношение $r_0s_0 = 0$, то для любого целого числа m выполнены соотношения $r\pi(x^m)s \in U_{m+1}$ и $s\pi(x^m)r \in U_{m+1}$.*

(4) *радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R равен нулю.*

Доказательство. В доказательстве потребуется следующее свойство редуцированного кольца A: если $a, b \in A$ и $ab = 0$, то $(ba)^2 = b(ab)a = 0$, откуда, в силу отсутствия нильпотентных элементов, $ba = 0$. Кроме того, каждый обратимый справа элемент редуцированного кольца A обратим слева.

(1) Пусть a — элемент кольца A, а n — целое число. Тогда элемент $\varphi^n(a)$ из A равен свободному члену элемента $\pi(x^n)\pi(a)\pi(x^{-n})$ из U_0. В силу правой инвариантности кольца R элемент $\pi(x^n)\pi(a)\pi(x^{-n})$ лежит в правом идеале $\pi(a)R = \mu(aA)$, поэтому все его левые коэффициенты (и, в частности, свободный член) лежат в aA. Поэтому $\varphi^n(a)A \subseteq aA$. В силу того, что n может принимать и отрицательные значения, получаем, что $\varphi^n(a)A = aA$ для всех a из A и для всех целых n.

(2) Действительно, $r\pi(x^n)s\pi(x^{-n}) \in U_1$, поэтому произведение свободных членов элементов r и $\pi(x^n)s\pi(x^{-n})$ равно нулю, то есть $r_0\varphi^n(s_0) = 0$. Из пункта (1) вытекает, что $s_0 \in \varphi^n(s_0)A$, поэтому $r_0s_0 = 0$, откуда вытекает также, что $s_0r_0 = 0$.

(3) Пусть m — произвольное целое число. Тогда в силу (1) $\varphi^m(s_0) \in s_0A$ и поэтому $r_0\varphi^m(s_0) = 0$, то есть произведение свободных членов элементов r и $\pi(x^m)s\pi(x^{-m})$ равно нулю, откуда $r\pi(x^m)s\pi(x^{-m}) \in U_1$. Получаем, что $r\pi(x^m)s \in U_{m+1}$. Аналогично из соотношения $s_0r_0 = 0$, получаем $s\pi(x^m)r \in U_{m+1}$, что и требовалось доказать.

(4) Допустим, что радикал $J(R)$ отличен от нуля. Тогда в нем найдётся элемент $r = \pi(fx^{-1})$, младшая степень которого равна -1 (и тогда младшая степень ряда f равна нулю). В силу предложения 4.2 все коэффициенты ряда fx^{-1} (и, следовательно, все коэффициенты ряда f) лежат в радикале $J(A)$. Пусть $(1 + r)^{-1} = \pi(gx^m)$ — элемент из R, обратный к $1 + \pi(fx^{-1})$ и младшая степень ряда g равна нулю.

Допустим, что $m < 0$. Из равенства $(1+\pi(fx^{-1}))\pi(gx^m) = 1$ получаем $(\pi(x)+\pi(f))\pi(x^{-1})\pi(g) = \pi(x^{-m})\in U_{-m}\subseteq U_0$. По пункту (2) получаем, что $f_0g_0 = 0$ и $g_0f_0 = 0$. В силу правой инвариантности кольца R выполнено включение

$$\pi(f_0)R\pi(g_0)\subseteq\pi(f_0)\pi(g_0)R = \pi(f_0g_0)R = 0.$$

Из равенства

$$\pi(x^{-m}) = (\pi(x)+\pi(f))\pi(x^{-1})\pi(g) =$$

$$= (\pi(f_0)+\pi(1+f_1)\pi(x)+\ldots)\pi(x^{-1})(\pi(g_0)+\pi(g_1)\pi(x)+\ldots) = \pi(x^{-m})\in U_{-m}$$

получаем

$$\pi(1+f_1)\pi(g_0)+\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_0)+\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x)\in U_1.$$

В силу доказанного выше $\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_0) = 0$, поэтому

$$\pi(1+f_1)\pi(g_0)+\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x)\in U_1.$$

Домножив справа на $\pi(x^{-1})\pi(f_0)$ и учтя, что

$$g_0\pi(x^{-1})f_0\in g_0f_0R = 0,$$

получаем

$$\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(f_0)\in U_0,$$

откуда, по пункту (2) получаем, что $f_0g_1f_0 = 0$, откуда $(f_0g_1)^2 = 0$ и $f_0g_1 = 0$. Отсюда получаем, что

$$\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\in\pi(f_0)\pi(g_1)R = 0$$

и поэтому из включения

$$\pi(1+f_1)\pi(g_0)+\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x)\in U_1$$

получаем $\pi(1+f_1)\pi(g_0)\in U_1$, откуда $(1+f_1)g_0 = 0$. Но элемент f_1 по предложению 4.2 лежит в радикале Джекобсона, поэтому элемент $1+f_1$ обратим и, следовательно, $g_0 = 0$, что противоречит выбору элемента g.

Допустим теперь, что $m = 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем равенства $f_0g_0 = 0$ и $g_0f_0 = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\pi(1+f_1)\pi(g_0)+\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x)-1\in U_1.$$

Тогда $\pi(1+f_1)\pi(g_0)\in 1-\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x)+U_1 = 1-\pi(f_0)\pi(\varphi^{-1}(g_1))+U_1$, откуда $(1+f_1)g_0 = 1-f_0\varphi^{-1}(g_1)$. Элемент f_0 по предложению 4.2 лежит в радикале Джекобсона $J(A)$, поэтому элемент $1-f_0\varphi^{-1}(g_1)$ обратим, аналогично обратим и элемент $1+f_1$. Поэтому элемент g_0 также обратим, что противоречит равенству $f_0g_0 = 0$ и выбору ряда f.

Наконец, допустим, что $m > 0$. Тогда из равенства

$$(1 + \pi(fx^{-1}))\pi(gx^m) = 1 \in U_0$$

вытекает, что $m = 1$ и произведение свободных членов элементов $\pi(f)$ и $\pi(x^{-1})\pi(g)\pi(x)$ равно единице. Но этого не может быть, поскольку по предложению 4.2 свободный член элемента $\pi(f)$ лежит в радикале $J(A)$ и, следовательно, не может быть обратимым. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Предложение 12.2. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, и кольцо R полулокально, то кольцо A полулокально;*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана полулокально, то кольцо A полулокально;*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ полулокально, то кольцо A полулокально.*

Доказательство. (1) Действительно, допустим, что кольцо A не полулокально. Тогда в нём существует бесконечная последовательность максимальных правых идеалов $B_1, B_2, B_3, \ldots$ такая, что правые идеалы $B_1, B_1 \bigcap B_2, B_1 \bigcap B_2 \bigcap B_3, \ldots$ образуют строго убывающую по включению последовательность. В силу леммы 4.1 правые идеалы $\mu(B_i)$ являются максимальными правыми идеалами кольца R, при этом идеалы

$$\mu(B_1), \mu(B_1)\bigcap\mu(B_2), \mu(B_1)\bigcap\mu(B_2)\bigcap\mu(B_3), \ldots$$

тоже образуют строго убывающую последовательность, что противоречит полулокальности кольца R. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пункты (2) (3) непосредственно вытекают из (1) и предложений 6.1 и 6.2. □

Из того, что отображение μ является инъективным вложением решётки правых идеалов кольца A в решётку правых идеалов кольца R, непосредственно вытекает следующее простое утверждение:

Предложение 12.3. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) *если R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, и кольцо R дистрибутивно справа, то и кольцо A дистрибутивно справа;*

(2) *если φ — автоморфизм кольца A, и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

(3) *если δ — дифференцирование кольца A, и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

Следующая лемма содержит известные утверждения (см., например [51], [54] и [56]) и приведена с доказательством только для удобства.

Лемма 12.4. *Пусть A — дистрибутивное справа кольцо. Тогда:*

(1) *Если I и J — правые идеалы кольца A, то между $I/(I\bigcap J)$ и $J/(I\cap J)$ нет ненулевых модульных гомоморфизмов.*

(2) *Если A нётерово справа, то A инвариантно справа.*

(3) *Если A — полупростое кольцо, то A является прямым произведением конечного числа тел.*

(4) *Если A полулокально, то A не содержит бесконечных несократимых сумм правых идеалов.*

(5) *Предположим, что A инвариантно справа, идеал $J(A)$ нильпотентен и факторкольцо $A/J(A)$ является прямым произведением конечного числа тел. Тогда A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец.*

Доказательство. (1) Достаточно доказать, что если $(X\oplus Y)_A$ — дистрибутивный модуль и $f\in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, то $f(x)=0$ для любого $x\in X$. По лемме 9.7 для элементов $x\in X$ и $f(x)\in Y$ найдется такой элемент $a\in A$, что $xa, f(x)(1-a)\in xA\bigcap f(x)A\subseteq X\bigcap Y=0$. Тогда

$$f(x)=f(x)(a+(1-a))=f(x)a=f(xa)=f(0)=0.$$

(2) Пусть I — правый идеал кольца A, а $y{\in}A$ — произвольный элемент этого кольца. Тогда, в силу нётеровости кольца A, возрастающая цепочка

$$I{\subseteq}(I+yI){\subseteq}(I+yI+y^2I){\subseteq}\dots$$

должна стабилизироваться. Пусть $J=I+yI+\ldots+y^nI$ и $J+y^{n+1}I{\subseteq}J$. Тогда $yJ{\subseteq}J$. Пусть k — минимальное целое число такое, что $J=I+yI+\ldots+y^kI$. Предположим, что $yI{\not\subseteq}I$. Тогда k отлично от нуля. Пусть $K=I+yI+\ldots+y^{k-1}I$. Тогда $J{\neq}K$ и $J=K+yK$.

Правилом $x{\to}yx$ задается модульный гомоморфизм ψ из J в J, который естественным образом индуцирует гомоморфизм $\overline{\psi}$ из J/K в J/yK. Кроме того, $J/K = (yK+K)/K \cong yK/(K \cap yK)$ и, аналогично, $J/yK \cong K/(K \cap yK)$. Поэтому (в силу (1)) гомоморфизм $\overline{\psi}$ должен быть нулевым. Тогда $\psi(J) = yJ \subseteq yK = \psi(K)$. Таким образом

$$J = \psi^{-1}(\psi(J)) = \psi^{-1}(\psi(K)) = K + \ker\psi.$$

Тогда обозначим через K_1 правый идеал $\psi^{-1}(K)$. Непосредственно проверяется, что

$$J = K + \ker\psi \subseteq K + K_1 = K_1 + \psi(K_1).$$

Применяя к K_1 те же рассуждения, что и ранее к K, получаем равенство $K_1 + \ker\psi = J$. Кроме того, $\ker\psi \subseteq K_1$. Поэтому $\psi^{-1}(K) = K_1 = J$. Тогда $yK \subseteq yJ = \psi(J) \subseteq K$, откуда $J = K + yK = K$, что противоречит выбору K.

(3) Поскольку кольцо A полупросто, то оно является прямым произведением конечного числа простых колец A_i. По пункту (2) кольцо A (а, следовательно, и каждое из колец A_i) является инвариантным справа. Инвариантное справа простое кольцо является телом. Следовательно, A является прямым произведением конечного числа тел.

(4) Так как кольцо A полулокально, то существует лишь конечное число неизоморфных простых правых модулей над A.

Предположим теперь, что $S = \sum I_i$ — счетная несократимая сумма ненулевых правых идеалов кольца A (без ограничения общности можно считать, что $\{I_i\}$ — главные правые идеалы). Тогда положим $J_j = \sum\limits_{i \neq j} I_i$. Заметим, что все подмодули J_j отличны от модуля S. Каждый правый модуль S/J_j является циклическим ненулевым модулем и обладает поэтому простым фактормодулем. Поскольку j пробегает бесконечное множество значений и общее число неизоморфных простых правых модулей над A конечно, то среди вышеупомянутых простых фактормодулей имеется хотя бы два изоморфных модуля. Это означает, что найдутся различные индексы i, j и собственные подмодули M, N в модуле S такие, что $S/M \cong S/N$, причем $J_i \subseteq M$ и $J_j \subseteq N$. Кроме того, $S = J_i + J_j \subseteq M + N$. Следовательно,

$$S/M = (M+N)/M = N/(M \cap N) \text{ и } S/N = (M+N)/N = M/(M \cap N).$$

Поэтому $N/(M \cap N) \cong M/(M \cap N)$, что в силу пункта (1) противоречит дистрибутивности A.

(5) Пусть факторкольцо $A/J(A)$ является прямым произведением конечного числа тел F_i. Обозначим через f_i единицу тела F_i. Единица факторкольца $A/J(A)$ является суммой попарно ортогональных идемпотентов f_i. Конечная система $\{f_i\}$ попарно ортогональных идемпотентов факторкольца $A/J(A)$ поднимается до системы попарно ортогональных идемпотентов e_i кольца A, поскольку $J(A)$ — ниль-идеал. Тогда $A = \oplus e_i A$.

Все идемпотенты инвариантного справа кольца A являются центральными в A. Кроме того, $F_i = (e_i A + J(A))/J(A) \cong e_i A/(e_i A \cap J(A))$ — тело.

Тогда e_iA — дистрибутивное кольцо (обозначим его A_i), причем кольцо $A_i/(A_i \cap J(A))$ является тело и идеал $A_i \cap J(A)$ нильпотентен. Умножение на e_i является гомоморфизмом из кольца A в кольцо A_i. Поэтому $A_i \cap J(A) = e_iJ(A) \subseteq J(e_iA) = J(A_i)$, и $e_iJ(A) = J(A_i)$, поскольку $A_i/e_iJ(A)$ — тело. Таким образом A_i — дистрибутивное справа инвариантное справа локальное кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона.

Тогда дистрибутивный правый модуль $J^n(A_i)/J^{n+1}(A_i)$ является векторным пространством над телом $A_i/J(A_i)$ и (в силу дистрибутивности) является простым. Поэтому $J(A_i)/J^2(A_i) = \overline{j}(A_i/J(A_i))$, где j — произвольный элемент из $J(A_i) \backslash J^2(A_i)$, а $\overline{j}$ — его образ в модуле $J(A)/J^2(A)$ при естественном эпиморфизме. Получаем

$$J(A_i) = jA_i + J^2(A_i) = jA_i + (jA_i + J^2(A_i))^2 = jA_i + j^2A_i + J^3(A_i) = \ldots = jA_i$$

в силу нильпотентности $J(A_i)$ и инвариантности A_i. Тогда $J^n(A_i)$ как правый идеал порождается любым элементом из $j^nA_i \backslash j^{n+1}A_i$, из чего следует, что любой правый идеал кольца A_i совпадает с какой-то степенью $J(A)$. Поэтому для каждого i кольцо A_i является цепным справа и артиновым справа, а кольцо A изоморфно прямому произведению A_i. $\square$

Предложение 12.5. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *все правые циклические модули над кольцом R конечномерны (не содержат бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей);*

(2) *кольцо R нётерово справа;*

(3) *кольцо A нётерово справа.*

Доказательство. Равносильность условий (2) и (3) доказана в предложении 8.1.

(2)$\Longrightarrow$(1). Все правые циклические модули над кольцом R — это в точности все фактормодули модуля R_R, поэтому если кольцо R нётерово справа, то и все правые циклические модули над ним нётеровы, и следовательно, конечномерны.

(1)$\Longrightarrow$(3). Идея доказательства этой импликации взята из работы Сонина [50].

Допустим, что кольцо A не является нётеровым справа. Тогда существует строго возрастающая цепочка правых идеалов $a_1A \subset a_1A + a_2A \subset \ldots$. Построим такую систему рядов Лорана $f^i \in A((x))$, что правые идеалы $\pi(f^i)R$ образуют бесконечную несократимую сумму. С учётом леммы 9.6 это будет противоречить условию.

Пусть $g : N \to N$ — какое-то сюръективное отображение натуральных чисел на натуральные числа такое, что $g^{-1}(n)$ — бесконечное множество для каждого натурального n. (Можно положить, например, $g(n) = n - [\sqrt{n}]^2 + 1$, где через $[x]$ обозначается целая часть от x.)

Зададим ряды f^i следующим образом: $f^{g(n)}_{2^n} = a_n$ для каждого n, а все остальные коэффициенты (отличные от вышеуказанных) всех рядов f^i равны нулю.

Предположим теперь, что $\pi(f^i)R$ не образуют несократимую сумму. Тогда существует такое i, что $\pi(f^i) \in \sum\limits_{j\neq i} \pi(f^j)R$. Поэтому для некоторого набора элементов r_j из R выполнено равенство $\pi(f^i) = \sum\limits_{j\neq i} \pi(f^j)r_j$, причем эта сумма содержит лишь конечное число ненулевых членов. Обозначим через l наименьшую из младших степеней r_j. В силу выбора отображения g множество $g^{-1}(i)$ бесконечно. Поэтому это множество содержит натуральное число n такое, что $2^n > -l$.

Тогда $f^i_{2^n} = f^{g(n)}_{2^n} = a_n$. Из равенства $\pi(f^i) = \sum\limits_{j\neq i} \pi(f^j)r_j$ следует, что $a_n \in \sum\limits_{j\neq i, k\leq 2^n - l} f^j_k A$. Кроме того, коэффициент f^j_k может быть отличен от нуля только если k совпадает с какой-то степенью двойки, причем $k\leq 2^n - l < 2^{n+1}$. При k равном 2^n коэффициент f^j_k (при j отличном от i) также равен нулю. Таким образом, $a_n \in \sum\limits_{j\neq i, k< 2^n} f^j_k A$, из чего следует включение $a_n \in \sum\limits_{m<n} a_m A$, что противоречит выбору последовательности $\{a_m\}$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 12.6. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо R дистрибутивно справа и полулокально;*

(2) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа колец;*

(3) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец;*

(4) *A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем правый идеал $\mu(A_i)$ является двусторонним для всех i.*

Доказательство. $(1) \Longrightarrow (4)$. Из предложений 12.3 и 12.2 следует, что кольцо A дистрибутивно справа и полулокально. По пункту (4) леммы 12.4 кольцо R не содержит бесконечных несократимых сумм правых идеалов. Кроме того, из леммы 9.6 и предложения 12.5 следует, что кольца A и R нётеровы справа. По (2) леммы 12.4 кольца A и R инвариантны справа.

Пусть $N(A)$ — первичный радикал кольца A. Так как A — нётерово справа кольцо, то идеал $N(A)$ нильпотентен. Из правой инвариантности кольца A следует, что $N(A)$ совпадает с множеством всех нильпотентных элементов кольца A. Тогда $A/N(A)$ — редуцированное кольцо. Поскольку R — инвариантное справа кольцо, идеал $\mu(N(A))$ является двусторонним. По лемме 4.3 кольцо $R/\mu(N(A))$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов $A/N(A)$. По пункту (4) леммы 12.1 радикал Джекобсона $J(R/\mu(N(A)))$ равен нулю, поэтому радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R равен $\mu(N(A))$. По условию кольцо R полулокально, поэтому кольцо $R/J(R) = R/\mu(N(A))$ артиново полупросто. По теореме 10.7 $A/N(A)$ — артиново кольцо. Тогда его радикал Джекобсона нильпотентен и, следовательно, равен нулю, так как в факторкольце $A/N(A)$ не может быть ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому $A/N(A)$ — полупростое артиново кольцо и $J(A) = N(A)$.

Применяя пункт (3) леммы 12.4 к кольцу $A/J(A)$ и пункт (5) леммы 12.4 к кольцу A, получаем, что A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i. Поскольку кольцо R инвариантно справа, то все правые идеалы $\mu(A_i)$ являются двусторонними, что и требовалось доказать.

(4) $\Longrightarrow$ (3). Действительно, пусть кольцо A разлагается в прямую сумму конечного числа колец A_i, причём $\mu(A_i)$ — двусторонние идеалы кольца R. Тогда, поскольку отображение $B : \longrightarrow \mu(B)$ сохраняет конечные суммы и пересечения правых идеалов, то кольцо R разлагается в прямую сумму правых идеалов $\mu(A_i)$, являющихся по условию также и двусторонними идеалами. Остаётся доказать, что каждое из колец $\mu(A_i)$ является цепным справа артиновым справа. Для этого докажем, что кольцо $\mu(A_i)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A_i.

Пусть π — отображение из $A((x))$ в R, удовлетворяющее условиям (1)-(4) определения лорановского кольца. Кольцо $A_i((x))$ естественным образом вкладывается в кольцо $A((x))$, поэтому можно рассмотреть ограничение π_i отображения π на $A_i((x))$. Непосредственно проверяется, что отображение π_i осуществляет биекцию кольца $A_i((x))$ на кольцо $\mu(A_i)$ и удовлетворяет условиям (1)-(4). Поэтому кольцо $\mu(A_i)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A_i и по теореме 11.4 является цепным справа артиновым справа кольцом, что и требовалось доказать.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Импликация очевидна.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Кольцо R дистрибутивно справа, поскольку любое прямое произведение дистрибутивных справа колец является дистрибутивным справа кольцом. Кольцо R полулокально, поскольку является прямым произведением конечного числа локальных колец. $\square$

Замечание. Множество всех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся ни на 2, ни на 3, является дистрибутивным справа полулокальным кольцом, но не является прямым произведением цепных справа колец. Множество A всех рациональных чисел с нечетными знаменателями является цепным кольцом, но не является полуцепным артиновым кольцом. В частности, A не является прямым произведением цепных артиновых колец. Из этих примеров следует, что для произвольного кольца условия, сформулированные в пунктах (1), (2) и (3) теоремы 12.6 не равносильны (хотя третье влечет второе, а второе влечет первое).

Отметим также, что дистрибутивные кольца рядов Лорана не обязаны быть ни полулокальными, ни нётеровыми справа или слева. Можно проверить, что нужный пример дает кольцо $A((x))$, где A — прямое произведение бесконечного числа полей A_i ($i = 1, 2, 3\ldots$). (Действительно, $A[[x]]$ — коммутативное дистрибутивное кольцо, поскольку $A[[x]] \cong \prod_{i=1}^{+\infty} A_i[[x]]$ и все $A_i[[x]]$ — цепные кольца. Таким образом, кольцо $A((x))$ изоморфно кольцу частных дистрибутивного кольца $A[[x]]$ относительно мультипликативно замкнутого множества $\{1, x, x^2, \ldots\}$.)

В качестве непосредственного следствия теоремы 12.6, используя леммы 10.1 и 10.2 можно получить следующие две теоремы:

Теорема 12.7. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо $A((x,\varphi))$ дистрибутивно справа и полулокально;*

(2) *кольцо $A((x,\varphi))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец;*

(3) *кольцо $A((x,\varphi))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец;*

(4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем $\varphi(A_i) = A_i$ для всех i.*

В связи с теоремой 12.7 заметим, что ситуация в случае колец рядов Лорана отличается от случая колец формальных степенных рядов, поскольку можно проверить, что кольцо формальных степенных рядов от одной переменной является прямым произведением конечного числа цепных справа колец тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является конечным прямым произведением тел.

Теорема 12.8. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа и полулокально;*

(2) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец;*

(3) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец;*

(4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем $\delta(A_i) \subseteq A_i$ для всех i.*

Библиография

[1] И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // *Функцион. анализ и его прил.* – 1976. – **10**. – С.13–39.

[2] А.С.Джумадильдаев. Дифференцирования и центральные расширения алгебры Ли формальных псевдодифференциальных операторов // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, No.1. – С.140–158.

[3] Ф.Каш. *Модули и кольца.* М.: Мир, 1981.

[4] И.Ламбек. *Кольца и модули.* М.: Мир, 1971.

[5] А.И.Мальцев. О вложении групповых алгебр в тела. // ДАН СССР. – 1948. – **60**. – С. 1499-1501.

[6] Д.Мамфорд. *Лекции о тэта-функциях.* М.: Мир, 1988.

[7] А.Н.Паршин. О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // *Труды Матем. института им. В.А.Стеклова.* – 1999. – **224**. – С.291–305.

[8] К.И.Сонин. Регулярные кольца рядов Лорана // Фундамент. и прикладн. математика. – 1995. – **1**. – No.1. – С. 315-317.

[9] К.И.Сонин. Регулярные кольца косых рядов Лорана // Фундамент. и прикладн. математика. – 1995. – **1**. – No.2. – С. 565-568.

[10] К.И.Сонин. Полупримитивные и полусовершенные кольца лорановских рядов. // Мат. заметки – 1996. – **60**. – No.2. – С. 300-303.

[11] К.И.Сонин. Бирегулярные кольца рядов Лорана // Вестник МГУ. – 1997. – No.4. – С. 22-24.

[12] К.Фейс. *Алгебра: кольца, модули и категории.* М.: Мир, 1979.

[13] A.Berarducci. Factorization in generalized power series // *Trans. Amer. Math. Soc.*. – 2000. – **352**, No. 2. – P.553–577.

[14] G.M.Bergman. Conjugates and nth Roots in Hahn-Laurents group rings. // Bull. Malaysian. Math. Soc. – 1978. – **1**, No.2. – P.29-41; Historical addendum – 1979. – **2**, No.2. – P.41-42.

[15] J.W.Brewer. *Power Series over Commutative Rings.* (Lecture notes in pure and applied mathematics; 64) – New York: Marcel Dekker. – 1981.

[16] P.M.Cohn. *Skew fields.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 1995.

[17] G.A.Elliott, P.Ribenboim. Fields of generalized power series. // Arch. Math. – 1990. – **54**, No.4. – P.365–371.

[18] D.R.Farkas, A.H.Schofield, R.L.Snider, J.T.Stafford. The isomorphism question for division rings of group rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – **85**, No.3. – P.327-330.

[19] K.R.Goodearl. *Von Neumann Regular Rings.* – London: Pitman, 1979.

[20] K.R.Goodearl. Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings // Rocky Mountain J. Math. – 1983. – **13**, No.4. – P.573-618.

[21] K.R.Goodearl, L.W.Small. Krull versus global dimension in Noetherian PI-rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **92**, No.2. – P.175–178.

[22] K.R.Goodearl, R.B.Warfield. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 1989.

[23] R.Gordon, J.C.Robson. *Krull dimension.* — Mem. Amer. Math. Soc. – **133**. – Providence, RI, 1973.

[24] V.Guillemin, D.Quillen, S.Sternberg. The integrability of characteristics // *Commun. Pure Appl. Math.* – 1970. – **23**. – P.39–77.

[25] V.Guillemin, S.Sternberg. *Symplectic techniques in physics.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 1984.

[26] J.W.Kerr. The power series ring over an Ore domain need not be Ore // J. Algebra. – 1982. – **75**. – P.175-177.

[27] Z.Liu. On n-root closedness of generalized power series rings over pairs of rings // *J. Pure Appl. Algebra.* – 1999. – **144**, No.3. – P.303–312.

[28] Z.Liu. A note on Hopfian modules // *Commun. Algebra.* – 2000. – **28**, No.6. – P.3031–3040.

[29] Z.Liu, H.Cheng. Quasi-duality for the rings of generalized power series // *Comm. Algebra.* – 2000. – **28**, No.3. – P.1175–1188.

[30] Z.Liu, F.Li. PS-rings of generalized power series // *Comm. Algebra.* – 1998. – **26**, No.7. – 2283–2291.

[31] M.Lorenz. Division algebras generated by finitely generated nilpotent groups // J. Algebra. – 1983. – **85**. – P.368-381.

[32] L.Makar-Limanov. The skew field of fractions of the first Weyl algebra contains a free noncommutative subalgebra // Commun. Algebra. – 1983. – **11**, No.17. – P.2003-2006.

[33] W.S.Martindale, M.P.Rosen, J.D.Rosen. Extended centroids of power series rings // *Glasgow Math. J.* – 1990. – **32**, No.3. – P.371–375.

[34] M.Mulase. Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition // Invent. Math. – 1988. – **92**. – P.1–46.

[35] I.Musson, K.Stafford. Malcev-Neumann group rings // Comm. Algebra. – 1993. – **21**, No.6. – P.2065-2075.

[36] B.H.Neumann. On ordered division rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – 202-252.

[37] P.Ribenboim. Squares in fields of generalized power series // *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada.* – 1990. – **12**, No.5. – P.199–203.

[38] P.Ribenboim. Rings of generalized power series: nilpotent elements // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* – 1991. – **61**. P.15–33.

[39] P.Ribenboim. Noetherian rings of generalized power series // *J. Pure Appl. Algebra.* – 1992. – **79**, No.3. – P.293-312.

[40] P.Ribenboim. Extension of Hironaka's standard basis theorem for generalized power series // *Arch. Math.* – 1993. – **60**, No.5. – P.436–439.

[41] P.Ribenboim. Multiplicative structures on power series and the construction of skewfields // *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* – 1993. – **316**, No.11. – P.1117–1121.

[42] P.Ribenboim. Rings of generalized power series. II. Units and zero-divisors // *J. Algebra.* – 1994. – **168**, No.1. – P.71–89.

[43] P.Ribenboim. Special properties of generalized power series // *J. Algebra.* – 1995. – **173**, No.3. – P.566–586.

[44] P.Ribenboim. Multiplicative structures on power series and the construction of skewfields // *J. Algebra.* – 1996. – **185**, No.2. – P.267–297.

[45] P.Ribenboim. Semisimple rings and von Neumann regular rings of generalized power series // *J. Algebra.* – 1997. – **198**, No.2. – P.327–338.

[46] L.Risman. Twisted rational functions and series. // J. Pure and Applied Algebra. – 1978. – **12**. – P.181-199.

[47] M.Sato, Y.Sato. Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassman manifold // *Lect. Notes Num. Appl. Anal.* – 1982. – **5**. – P.259–271.

[48] I.Schur. Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke // Sitzungsber. Berliner Math. Ges. – 1905. – **4**. – S.2–8.

[49] T.H.Smits. Skew-Laurent series over semisimple rings // *Delft. Progr. Report.* – 1977. – **2**. – P.131-136.

[50] C.Sonin. Krull dimension of Malcev-Neumann rings // *Comm. Algebra.* – 1998. – **26**, no. 9. – 2915–2931.

[51] W.Stephenson. Modules whose lattice of submodules is distributive // *Proc. London Math. Soc.* – 1974. – **28**, No.2. – P.291–310.

[52] J.P.Tignol. Cyclic and elementary abelian subfields of Malcev-Neumann division algebras // *J. Pure Appl. Algebra.* – 1986. – **42**, No.2. – P.199–220.

[53] J.P.Tignol, S.A.Amitsur. Kummer subfields of Malcev-Neumann division algebras // *Israel. J. Math.* – 1985. – **50**, No.1-2. – P.114-144.

[54] A.A.Tuganbaev (1998). *Semidistributive Modules and Rings*, (Kluwer Academic Publishers: Dordrecht–Boston–London).

[55] A.A.Tuganbaev (1999). *Distributive Modules and Related Topics*, (Gordon and Breach: Amsterdam).

[56] A.A.Tuganbaev (2002). *Rings Close to Regular*, (Kluwer Academic Publishers: Dordrecht–Boston–London).

Публикации автора по теме диссертации

[57] Д.А.Туганбаев. Цепные кольца рядов Лорана // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 1997. – **3**, No.3. – С.947–951.

[58] Д.А.Туганбаев. Дистрибутивные полулокальные кольца рядов Лорана // *Универсальная алгебра и ее приложения: тезисы докладов международного семинара, посвященного памяти Л.А.Скорнякова, Волгоград, 6–11 сентября 1999 г..* – Волгоград: Перемена. – 1999. – С.66–67.

[59] Д.А.Туганбаев. Цепные кольца косых рядов Лорана // *Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ.* – 2000. – No.1. – С.52–55.

[60] Д.А.Туганбаев. Кольца косых рядов Лорана и кольца главных идеалов // *Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ.* – 2000. – No.5. – С.55–57.

[61] Д.А.Туганбаев. Полулокальные дистрибутивные кольца косых рядов Лорана // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 2000. – **6**, No.3. – С.913–921.

[62] D.A.Tuganbaev. Some ring and module properties of skew Laurent series // *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, D.Krob, A.A.Mikhalev, A.V.Mikhalev* (*Eds.*), Berlin: Springer. – 2000. – P.613–622.

[63] Д.А.Туганбаев. Дистрибутивные полулокальные кольца рядов Лорана // *Тезисы докладов международного алгебраического семинара, посвященного 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре, Москва, 13–16 сентября 2000 г..* – М: МГУ. – 2000. – С.55–56.

[64] Д.А.Туганбаев. Полуцепные артиновы кольца псевдодифференциальных операторов // *Математические методы и приложения. Труды девятых математических чтений МГСУ.* – М.: МГСУ. – 2002. – С.111–115.

[65] Д.А.Туганбаев. Кольца псевдодифференциальных операторов и условия на цепи // *Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ..* – 2002. – No.4. – С.26–32.

[66] Д.А.Туганбаев. Кольца рядов Лорана от нескольких переменных // *Математические методы и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ.* – М.: МГСУ. – 2003. – С.125–127.

Предметный указатель